Bochnerの定理

2021年1月15日

iを虚数単位、μを確率測度として、$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{iz^T x} \mu(dx) \ , \ z \in \mathbb{R}^m \tag{1}$$

を μ の特性関数 (characteristic function) という。また、任意の $n = 1, 2, \ldots$, $\xi_1, \xi_2, \ldots \in \mathbb{C}$, $z_1, z_2, \ldots \in \mathbb{R}^m$ に対して、

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_j \overline{\xi_k} \varphi(z_j - z_k) \geq 0 \tag{2}$$

が成立するとき、φは非負定値であるという。

定理 1 (Bochner) $\varphi(z)$が特性関数であること、すなわち(1)を満足するμが存在することと、以下の3条件が同時に成立することは同値である。

1. φが非負定値である。
2. φが$z = 0$で連続
3. $\varphi(0) = 1$

系 1 連続関数$\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$が$\varphi$が非負定値であることと、それがある特性関数の定数倍になることは同値である。

証明は、Kiyosi Ito, "Introduction to Probability Theory"(Cambridge University Press)によった。$m = 1$を仮定しているが、一般のmへの拡張は容易である。

証明: 必要性は

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_j \overline{\xi_k} \varphi(z_j - z_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_j \overline{\xi_k} \int_{\mathbb{R}} e^{iz_j x} \overline{e^{iz_k x}} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} |\sum_{j=1}^{n} \xi_j e^{iz_j x}|^2 d\mu(x) \geq 0$$

$$|\varphi(z) - \varphi(0)| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{izx} - 1| \mu(dx) \leq |z| \int_{\mathbb{R}} |x(1 + \frac{1}{2} izx - \frac{1}{3} z^2 x^2 + \cdots)| \mu(dx)$$

および$\int_{\mathbb{R}} d\mu(x) = 1$より、成立する。十分性は、条件1より、$n = 2$として、$\xi_1 = \xi_2 = 1$, $z_1 = z$, $z_2 = 0$および$\xi_1 = \xi_2 = 1$, $z_1 = z$, $z_2 = 0$を(2)に代入すると、それぞれ

$$2\varphi(0) + \varphi(z) + \varphi(-z) \geq 0$$

$$2\varphi(0) - i\varphi(z) + i\varphi(-z) \geq 0$$

を意味する。また、条件 3 より、$\varphi(z)+\varphi(-z)$ が実数で、$\varphi(z)-\varphi(-z)$ が純虚数となる。これは、$\varphi(-z)=\overline{\varphi(z)}$ を意味する。そして、$n=2, \xi_1=\xi, \xi_2=\eta,\ z_1=z,\ z_2=0$ を (2) に代入すると、

$$\xi\bar{\xi}+\xi\overline{\eta}\varphi(z)+\bar{\xi}\eta\overline{\varphi(z)}+\eta\overline{\eta}=[\xi,\eta]\begin{bmatrix}1 & \overline{\varphi(z)}\\ \varphi(z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\xi}\\ \overline{\eta}\end{bmatrix}$$

となり、行列式が非負なので、$|\varphi(z)|\leq 1$ となり、有界である。さらに、(2) で $n=3,\ \xi_1=-1, \xi_2=1, \xi_3=\eta, z_1=0, z_2=h, z_3=z+h,$ さらに $\eta:=\overline{\varphi(z+h)-\varphi(z)}$ とおくと

$$\begin{aligned}&1-\varphi(h)-\overline{\eta}\overline{\varphi(z+h)}-\overline{\varphi(h)}+1+\overline{\eta}\overline{\varphi(h)}-\eta\varphi(z+h)+\eta\varphi(z)+\eta\overline{\eta}\\ =\ &2-\varphi(h)-\overline{\varphi(h)}-|\varphi(z+h)-\varphi(z)|^2\end{aligned}$$

この値が非負であることは、

$$|\varphi(z+h)-\varphi(z)|^2\leq 2-\varphi(h)-\overline{\varphi(h)}=2Re(1-\varphi(h))\leq 2|1-\varphi(h)|$$

を意味し、条件 2 から、さらに φ が一様連続であることを意味する。

以下では、そのような φ を用いて定義される

$$f_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-t^2/n}e^{-ixt}dt$$

が確率密度関数になることを示し、さらにその特性関数 φ_n が $n\to\infty$ で φ に近づくことを示す。それが導かれれば、Levy の収束定理によって、収束先である φ が特性関数であることが示されたことになる。

まず、

$$g_n(t):=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\exp\{-\frac{t^2}{2\sigma_n^2}-ixt\}$$

$(\sigma^2=n/4)$ とおくと、$\varphi(t-s)g_n(t)\overline{g_n(s)}$ も一様連続かつ有界であるので、条件 1 から、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t-s)g_n(t)\overline{g_n(s)}dsdt=\lim_{h\to\infty}\sum_{j=-h^2}^{h^2}\sum_{k=-h^2}^{h^2}\varphi(\frac{j}{h}-\frac{k}{h})g_n(\frac{j}{h})\overline{g_n(\frac{k}{h})}(\frac{1}{h})^2\geq 0$$

とできる。また

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}g_n(u+s)\overline{g_n(s)}ds=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}e^{-ixu}\exp\left(-\frac{(u+s)^2}{2\sigma_n^2}-\frac{s^2}{2\sigma_n^2}\right)ds\\ =\ &\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}e^{-ixu}\exp\left(-\frac{1}{\sigma_n^2}(s+\frac{u}{2})^2-\frac{u^2}{4\sigma_n^2}\right)ds\\ =\ &\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}e^{-ixu}e^{-u^2/(4\sigma_n^2)}\sqrt{2\pi\cdot(\sigma_n^2/2)}=\sqrt{\frac{1}{\pi n}}e^{-u^2/n}e^{-ixu}\end{aligned}$$

より、$f_n(x)\geq 0$ が成立する。さらに

$$\int_{-a}^{a}f_n(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-t^2/n}e^{-ixt}dtdx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-t^2/n}\frac{2\sin at}{t}dt$$

となる。ただし、最後の変形には Fubini の定理を用いた。そして、$\dfrac{1-\cos t}{t^2}\geq 0, \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt=\pi,\ \pi(0)=1$ より、$b\to\infty$ で

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b}\int_0^b\{\int_{-a}^{a}f_n(x)dx\}da=\frac{1}{b}\int_0^b\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-t^2/n}\frac{2\sin at}{t}dadt\\ =\ &\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-t^2/n}\frac{2(1-\cos tb)}{t^2b}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\frac{u}{b})e^{-t^2/n}\frac{2(1-\cos u)}{u^2}du\to 1\end{aligned}$$

となる。ただし、最後の変形には優収束定理を用いた。すなわち、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = 1$ が成立する。

最後に、$\varphi_n \to \varphi$ $(n \to \infty)$ を示して証明を終わる:

$$
\begin{aligned}
\varphi_n(z) &:= \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} e^{izx}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-t^2/n}e^{-itx}dt = \lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-t^2/n}\frac{2\sin a(t-z)}{t-z}dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}\int_0^b da\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-t^2/n}\frac{2\sin a(t-z)}{t-z}dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-t^2/n}\frac{2(1-\cos b(t-z))}{b(t-z)^2}dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(z+\frac{s}{b})e^{-(z+s/b)^2/n}\frac{2(1-\cos s)}{s^2}dt = \varphi(z)e^{-z^2/n}
\end{aligned}
$$