第 3 回 確率変数

鈴木 譲

以下では、実数全体を $\mathbb{R}$、整数全体を $\mathbb{Z}$、$\lfloor x \rfloor$ で x の切下げ、$\lceil x \rceil$ で x の切上げを表すものとする。

そして、確率空間が $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ であることを仮定し、Ω から $\mathbb{R}$ への写像 X を定義して、事象を表現することを考える。

以下 (例 1)-(例 4) では、Ω が n 個の要素をもつ場合、事象の集合 $\mathcal{F}$ は 2^n 個の要素をもつ場合 (自明な事象の集合) のみを考えるものとする。

例 1　$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ として、

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{2, 4, 6\} \\ -1, & \omega \in \{1, 3, 5\} \end{cases}$$

と定義する。$X(\omega) = 1$ となる ω の集合は事象 $\{2, 4, 6\}$、$X(\omega) = -1$ となる ω の集合は事象 $\{1, 3, 5\}$ である。

例 2　$\Omega = \{(i, j) | i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ として、$\omega = (i, j)$ のとき、$X(\omega) = i + j$ とすれば、$X(\omega) = 5$ となる Ω の部分集合は、$\{(i, j) | i + j = 5\} = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$ となり、これは事象になる。

以下では、$a \in \mathbb{R}$ として、$X(\omega) = a$ となる ω の集合すなわち事象 $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = a\}$ を、$(X = a)$ のようにかく。不等式 $X \leq a$ の場合も、$(X \leq a)$ のようにかくものとする。

例 3　例 1 で、$X(\omega) = 0$ となる ω は存在しないので、$(X = 0) = \phi$ となる。また、$X(\omega) = \pm 1$ となる ω はすべてであるので、$(X = \pm 1) = \Omega$ となる。さらに

$$(X \leq a) = \begin{cases} \phi, & a < -1 \\ \{1, 3, 5\}, & -1 \leq a < 1 \\ \Omega, & 1 \leq a \end{cases}$$

となる。また、X を用いて表現できる事象は、$\phi, \Omega, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}$ のみであり、それらで事象の集合 $\mathcal{F}'$ をなし (第 1 回「事象と確率」(1)(2)(3) を満足し)、$\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ となる。

例 4　$\Omega = \{0, 1\}^n$ (0, 1 からなる長さ n の 2 進列), $X(\omega) = |\omega|$ (ω 中の 1 の個数) とおくと、$(X \leq a) = \{\omega \in \Omega || \omega| \leq a\}$ が成り立つ。この場合も、関数 X によって得られた事象 $\mathcal{F}'$ は、$\mathcal{F}$ の部分集合になっていることがわかる。実際、$n = 3$ であれば、$\mathcal{F}$ は、

$$\{000\}, \{001\}, \{010\}, \{100\}, \{011\}, \{101\}, \{110\}, \{111\}$$

で生成され、2^8 個の要素 (事象) をもつが、$\mathcal{F}'$ は、

$$\{000\}, \{001, 010, 100\}, \{011, 101, 110\}, \{111\}$$

で生成され、2^4 個の要素 (事象) をもつ。

以下では、区間と孤立点をすべて含む事象の集合 (ボレル集合族) を $\mathcal{B}$ とかくものとする。

例 5　$\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}$ として、$X(\omega) := \omega^2$ とおくと、$a > 0$ のとき、$(X = a) = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$ となる。

$$(X \leq a) = \begin{cases} \phi, & a < 0 \\ \{0\}, & a = 0 \\ [-\sqrt{a}, \sqrt{a}], & 0 < a \end{cases}$$

例 6　$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ として、$X(\omega)$ を w の小数部を切り捨てて、整数にする関数とする。すなわち、$X(\omega) = i$ となる ω は、$i \le \omega < i+1$ となり、$(X = i) = [i, i+1)$ となる。また、$X \le a = (-\infty, \lceil a \rceil)$ となる。

例 7　$\Omega = \mathbb{R}$, 区間 $[i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$ で生成される区間の集合を $\mathcal{F}$, $X(\omega) := \lfloor w + 0.5 \rfloor$(四捨五入) とする。このとき、$a \notin \mathbb{Z}$ であれば、$(X \le a)$ を $[i, i+1)$ の和集合ではあらわせないないので、$\mathcal{F}$ の要素 (事象) ではない。

一般に、すべての $a \in \mathbb{R}$ に対して、$(X \le a) \in \mathcal{F}$(可測性) となる X を確率変数という。しかし、Ω が有限集合で事象の集合 $\mathcal{F}$ が自明の場合 (例 1,2,3,4)、Ω が実数全体で $\mathcal{F}$ がボレル集合族の場合 (例 5,6) は、可測性を考慮しなくとも、Ω から $\mathbb{R}$ への任意の写像 X は、確率変数になる。そして、$\{(X \le a),\ a \in \mathbb{R}\}$ によって生成される事象の集合 $\mathcal{F}'$ を、確率変数 X の生成する事象の集合とよぶ。

また、確率変数は写像であるが、ランダムな変数のような扱いをされる。しかし、X が Ω の値によらない定数の場合は、X は確率変数になる。

例 8　$\omega \in \Omega$ の値によらず $X(\omega) = 0$ となる X は、事象の集合 $\mathcal{F}$ によらず確率変数である。実際、$a < 0$ なる a について $(X \le a) = \phi$ になり、$a \ge 0$ なる a について $(X \le a) = \Omega$ になり、ともに事象 ($\mathcal{F}$ の要素) になっている。

一般に、X が確率変数であるかぎり、$\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ が成立するが、本講義のこれからの議論では、$\mathcal{F}$ の存在を仮定せず、あたかも $(\Omega, \mathcal{F}', P)$ が確率空間であるかのような扱いをする。すなわち、最初に確率変数 X を定義し、それによってきまる事象の集合に対して確率 P を定義するのである。

他方、すべての $a, b \in \mathbb{R}$ について、$(X \le a)$, $(Y \le b)$ が事象であるとき、すべての $c \in \mathbb{R}$ について、$(X+Y \le c)$ が事象になるかどうかは必ずしも自明でないが、真であることが知られている。

定理 1　X, Y が確率変数であれば、X の定数倍、$X+Y$、XY, $Y \ne 0$ のとき X/Y, それ以外で 0、$\max(X, Y)$ も、確率変数になる。

(証明略)

また、確率変数に関する事象が複数あって、それらの積を表す場合、$(X = 1) \cap (Y = -1)$ などではなく、$(X = 1, Y = -1)$ のようにあらわすものとする。

例 9　大小のサイコロがあり、大きいサイコロの目が偶数なら $X = 1$, 奇数なら $X = -1$、小さい方のサイコロの目が偶数なら $Y = 1$, 奇数なら -1 というように確率変数 X, Y を決めると、$X + Y$ および $\max(X, Y)$ は確率変数になる。実際、

$$(X + Y \le a) = \begin{cases} (X = -1, Y = -1), & a < 0 \\ (X = 1, Y = -1) \cup (X = -1, Y = 1), & 0 \le a < 2 \\ \Omega, & 2 \le a \end{cases}$$

$$(\max\{X, Y\} \le a) = \begin{cases} (X = -1, Y = -1), & a < 1 \\ \Omega, & 1 \le a \end{cases}$$

とできる。