

## 第3回 確率変数

鈴木 譲

以下では、実数全体を  $\mathbb{R}$ 、整数全体を  $\mathbb{Z}$ 、 $\lfloor x \rfloor$  で  $x$  の切下げ、 $\lceil x \rceil$  で  $x$  の切上げを表すものとする。

そして、確率空間が  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  であることを仮定し、 $\Omega$  から  $\mathbb{R}$  への写像  $X$  を定義して、事象を表現することを考える。

以下(例1)-(例4)では、 $\Omega$  が  $n$  個の要素をもつ場合、事象の集合  $\mathcal{F}$  は  $2^n$  個の要素をもつ場合(自明な事象の集合)のみを考えるものとする。

例1  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  として、

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{2, 4, 6\} \\ -1, & \omega \in \{1, 3, 5\} \end{cases}$$

と定義する。 $X(\omega) = 1$  となる  $\omega$  の集合は事象  $\{2, 4, 6\}$ 、 $X(\omega) = -1$  となる  $\omega$  の集合は事象  $\{1, 3, 5\}$  である。

例2  $\Omega = \{(i, j) | i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  として、 $\omega = (i, j)$  のとき、 $X(\omega) = i + j$  とすれば、 $X(\omega) = 5$  となる  $\Omega$  の部分集合は、 $\{(i, j) | i + j = 5\} = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$  となり、これは事象になる。

以下では、 $a \in \mathbb{R}$  として、 $X(\omega) = a$  となる  $\omega$  の集合すなわち事象  $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = a\}$  を、 $(X = a)$  のようにかく。不等式  $X \leq a$  の場合も、 $(X \leq a)$  のようにかくものとする。

例3 例1で、 $X(\omega) = 0$  となる  $\omega$  は存在しないので、 $(X = 0) = \phi$  となる。また、 $X(\omega) = \pm 1$  となる  $\omega$  はすべてであるので、 $(X = \pm 1) = \Omega$  となる。さらに

$$(X \leq a) = \begin{cases} \phi, & a < -1 \\ \{1, 3, 5\}, & -1 \leq a < 1 \\ \Omega, & 1 \leq a \end{cases}$$

となる。また、 $X$  を用いて表現できる事象は、 $\phi, \Omega, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}$  のみであり、それらで事象の集合  $\mathcal{F}'$  をなし(第1回「事象と確率」(1)(2)(3)を満足し)、 $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$  となる。

例4  $\Omega = \{0, 1\}^n$  ( $0, 1$  からなる長さ  $n$  の2進列)、 $X(\omega) = |\omega|$  ( $\omega$  中の1の個数)とおくと、 $(X \leq a) = \{\omega \in \Omega | |\omega| \leq a\}$  が成り立つ。この場合も、関数  $X$  によって得られた事象  $\mathcal{F}'$  は、 $\mathcal{F}$  の部分集合になっていることがわかる。実際、 $n = 3$  であれば、 $\mathcal{F}$  は、

$$\{000\}, \{001\}, \{010\}, \{100\}, \{011\}, \{101\}, \{110\}, \{111\}$$

で生成され、 $2^8$  個の要素(事象)をもつが、 $\mathcal{F}'$  は、

$$\{000\}, \{001, 010, 100\}, \{011, 101, 110\}, \{111\}$$

で生成され、 $2^4$  個の要素(事象)をもつ。

以下では、区間と孤立点をすべて含む事象の集合(ボレル集合族)を  $\mathcal{B}$  とかくものとする。

例5  $\Omega = \mathbb{R}$ 、 $\mathcal{F} = \mathcal{B}$  として、 $X(\omega) := \omega^2$  とおくと、 $a > 0$  のとき、 $(X = a) = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$  となる。

$$(X \leq a) = \begin{cases} \phi, & a < 0 \\ \{0\}, & a = 0 \\ [-\sqrt{a}, \sqrt{a}], & 0 < a \end{cases}$$

例 6  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}$  として、 $X(\omega)$  を  $\omega$  の小数部を切り捨てて、整数にする関数とする。すなわち、 $X(\omega) = i$  となる  $\omega$  は、 $i \leq \omega < i+1$  となり、 $(X = i) = [i, i+1)$  となる。また、 $X \leq a = (-\infty, [a])$  となる。

例 7  $\Omega = \mathbb{R}$ , 区間  $[i, i+1)$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  で生成される区間の集合を  $\mathcal{F}$ ,  $X(\omega) := \lfloor \omega + 0.5 \rfloor$  (四捨五入) とする。このとき、 $a \notin \mathbb{Z}$  であれば、 $(X \leq a)$  を  $[i, i+1)$  の和集合ではあらわせないないので、 $\mathcal{F}$  の要素 (事象) ではない。

一般に、すべての  $a \in \mathbb{R}$  に対して、 $(X \leq a) \in \mathcal{F}$  (可測性) となる  $X$  を確率変数という。しかし、 $\Omega$  が有限集合で事象の集合  $\mathcal{F}$  が自明の場合 (例 1,2,3,4)、 $\Omega$  が実数全体で  $\mathcal{F}$  がボレル集合族の場合 (例 5,6) は、可測性を考慮しなくとも、 $\Omega$  から  $\mathbb{R}$  への任意の写像  $X$  は、確率変数になる。そして、 $\{(X \leq a), a \in \mathbb{R}\}$  によって生成される事象の集合  $\mathcal{F}'$  を、確率変数  $X$  の生成する事象の集合とよぶ。

また、確率変数は写像であるが、ランダムな変数のような扱いをされる。しかし、 $X$  が  $\Omega$  の値によらない定数の場合は、 $X$  は確率変数になる。

例 8  $\omega \in \Omega$  の値によらず  $X(\omega) = 0$  となる  $X$  は、事象の集合  $\mathcal{F}$  によらず確率変数である。実際、 $a < 0$  なる  $a$  について  $(X \leq a) = \phi$  になり、 $a \geq 0$  なる  $a$  について  $(X \leq a) = \Omega$  になり、ともに事象 ( $\mathcal{F}$  の要素) になっている。

一般に、 $X$  が確率変数であるかぎり、 $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$  が成立するが、本講義のこれからの議論では、 $\mathcal{F}$  の存在を仮定せず、あたかも  $(\Omega, \mathcal{F}', P)$  が確率空間であるかのような扱いをする。すなわち、最初に確率変数  $X$  を定義し、それによってきまる事象の集合に対して確率  $P$  を定義するのである。

他方、2 個の確率変数  $X, Y$  を扱う場合、事象の集合  $\mathcal{F}'$  は、 $(X \leq a), (Y \leq b), a, b \in \mathbb{R}$  で生成されたものとなる。また、そのような事象の集合  $\mathcal{F}'$  に、 $(X + Y \leq c), c \in \mathbb{R}$  が含まれるかどうかは必ずしも自明でないが、真であることが知られている。 $X$  の定数倍、 $XY, Y \neq 0$  のとき  $X/Y$ , それ以外で 0、 $\max(X, Y)$  などとも同様である。すなわち、以下がいえる。

定理 1  $X, Y$  が確率変数であれば、 $X$  の定数倍、 $X + Y, XY, Y \neq 0$  のとき  $X/Y$ , それ以外で 0、 $\max(X, Y)$  も、確率変数になる。

(証明略)

また、確率変数に関する事象が複数あって、それらの積を表す場合、 $(X = 1) \cap (Y = -1)$  などではなく、 $(X = 1, Y = -1)$  のようにあらわすものとする。

例 9 大小のサイコロがあり、大きいサイコロの目が偶数なら  $X = 1$ , 奇数なら  $X = -1$ 、小さい方のサイコロの目が偶数なら  $Y = 1$ , 奇数なら  $-1$  というように確率変数  $X, Y$  を決めると、 $X + Y$  および  $\max(X, Y)$  は確率変数になる。実際、

$$(X + Y \leq a) = \begin{cases} \phi, & a < -2 \\ (X = -1, Y = -1), & -2 \leq a < 0 \\ (X = -1, Y = -1) \cup (X = 1, Y = -1) \cup (X = -1, Y = 1), & 0 \leq a < 2 \\ \Omega, & 2 \leq a \end{cases}$$

および

$$(\max\{X, Y\} \leq a) = \begin{cases} \phi, & a < -1 \\ (X = -1, Y = -1), & -1 \leq a < 1 \\ \Omega, & 1 \leq a \end{cases}$$

とできる。そして、 $(X = -1, Y = -1), (X = 1, Y = -1), (X = -1, Y = 1), (X = -1, Y = -1)$  は、 $X, Y$  によって生成された事象の集合  $\mathcal{F}'$  に含まれる。