第 2 回 条件付き確率とベイズの定理

鈴木 譲

以下では、1 つの確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を仮定する。

$A, B \in \mathcal{F}$ として、$P(B) > 0$ のとき、$P(A \cap B)/P(B)$ を B のもとでの A の条件付き確率といい $P(A|B)$ とかく。また、$P(A \cap B)$ を A, B の同時確率という。

また、$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ のとき、$A, B \in \mathcal{F}$ は独立であるという。

定理 1　$n \geq 1$ として、$P(A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$ のとき、

$$P(A_0 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_0)P(A_1|A_0) \cdots P(A_n|A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \tag{1}$$

証明: $P(A_0) > 0$ のとき、$P(A_1|A_0) = \dfrac{P(A_0 \cap A_1)}{P(A_0)}$ が定義でき、$P(A_0 \cap A_1) = P(A_0)P(A_1|A_0)$ がいえる。n で定理が正しいと仮定すると、$n+1$ の仮定 $P(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0$ が成立するとき、「1. 事象と確率」定理 5 と $A_0 \cap \cdots \cap A_n \subseteq A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ より、$P(A_0 \cap \cdots \cap A_n) \leq P(A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1})$、すなわち $P(A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$ が成立し、(1) が成立する。また、

$$P(A_0 \cap \cdots \cap A_{n+1}|A_0 \cap \cdots \cap A_n) = \frac{P(A_0 \cap \cdots \cap A_{n+1})}{P(A_0 \cap \cdots \cap A_n)} \tag{2}$$

が定義できるので、(1)(2) より、

$$P(A_0 \cap \cdots \cap A_{n+1}) = P(A_0)P(A_1|A_0) \cdots P(A_{n+1}|A_0 \cap \cdots \cap A_n)$$

定理 2　$B \in \mathcal{F}$ を、$P(B) > 0$ とすれば、$(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot|B))$ は確率空間をなす

証明: $P(A \cap B) \geq 0$ より、$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$。また、$P(\Omega|B) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$。さらに、$A_1, A_2, \cdots$ が排反であれば、$A_1 \cap B, A_2 \cap B, \cdots$ も排反であるので、

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots |B) = \frac{P((A_1 \cup A_2 \cup \cdots) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots}{P(B)}$$
$$= \frac{P((A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P((A_2 \cap B)}{P(B)} + \cdots = P(A_1|B) + P(A_2|B) + \cdots$$

したがって、「1. 事象と確率」の (4)(5)(6) が成立する。

定理 3　排反な $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ が $P(A_1) > 0, P(A_2) > 0, \cdots$ および $A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \Omega$ を満足するとき、各 $B \in \mathcal{F}$ について、

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots$$

証明: $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \cdots$ は排反であるので、

$$P(B) = P((A_1 \cup A_2 \cup \cdots) \cap B) = P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots$$

また、$P(A_1) > 0, P(A_2) > 0, \cdots$ より、$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots$

定理 4　排反な $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ が $P(A_1) > 0, P(A_2) > 0, \cdots$ および $A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \Omega$ を満足するとき、$P(B) > 0$ なる $B \in \mathcal{F}$ について、

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots}\ ,\ j = 1, 2, \cdots$$

証明: $P(A_j|B) = \dfrac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_j)P(B|A_j)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots}$ より成立。

定理 5　$A, B \in \mathcal{F}$ が独立で、$P(B) > 0$ であれば、$P(A|B) = P(A)$。

証明: $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$ および $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ より成立。

例 1　硬貨とサイコロを同時に投げる。標本空間をつくり、硬貨のおもてのでる確率を求めよ。ただし、硬貨のおもてうら、サイコロの各目は独立に等確率で生じるものとする。

$\Omega = \{(i,j)|i = 0, 1, j = 1, \cdots, 6\}$, $P(\{(i,j)\}) = \frac{1}{12}$, $A = \{(0,j)|j = 1, \cdots, 6\}$, $P(A) = \sum_{j=1}^{6} P(\{(0,j)\}) = 6 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$

例 2　大小の 2 個サイコロを投げる。大きいサイコロの目が 3 である事象、両方の目の和が偶数である事象をそれぞれ A, B で表すならば、$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立つことを示せ。ただし、それぞれのサイコロで各目が等確率で生じるものとする。

$\Omega = \{(i,j)|i, j = 1, \cdots, 6\}$, $A = \{(3,j)|j = 1, \cdots, 6\}$ $B = \{(i,j)|i + j$ が偶数 $\}$ $A \cap B = \{(3,1), (3,3), (3,5)\}$ より、$|\Omega| = 36$, $|A| = 6$, $|B| = 18$, $|A \cap B| = 3$, したがって、

$$\frac{1}{12} = P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$$

となり、事象 A, B は独立。

例 3　$\Omega = \{1, \cdots, 12\}$, $P(\{\omega_j\}) = 1/12$, $j = 1, \cdots, 12$ として、$A = \{1, 2, 4, 12\}$, $B = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$, $C = \{1, 5, 6, 7, 9, 12\}$ の各対は独立か。

$A \cap B = \{1, 2\}$, $B \cap C = \{1, 5, 6, 7\}$, $C \cap A = \{1, 12\}$, $|A| = 4$, $|B| = 6$, $|C| = 6$, $|A \cap B| = 2$, $|B \cap C| = 4$, $|C \cap A| = 2$, $|\Omega| = 12$,

$$\begin{aligned}\frac{2}{12} &= P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{4}{12} \cdot \frac{6}{12} \\ \frac{4}{12} &= P(B \cap C) \neq P(B)P(C) = \frac{6}{12} \cdot \frac{6}{12} \\ \frac{1}{6} &= P(C \cap A) = P(C)P(A) = \frac{6}{12} \cdot \frac{4}{12}\end{aligned}$$

となり、A, B は独立、B, C は独立ではない、C, A は独立。

例 4　$A, B \in \mathcal{F}$ が排反であって、$P(A) > 0, P(B) > 0$ のとき、A, B が独立にはなりえないことを示せ。

$A \cap B = \phi$ より、$0 = P(A \cap B) \neq P(A)P(B) > 0$ が成立する。

例 5　$A_1, \cdots, A_n, B, C \in \mathcal{F}$ が $P(A_1) > 0, \cdots, P(A_n) > 0, P(B) > 0, P(C) > 0$ のとき、$P(A_j)$, $P(B|A_j)$, $P(C|B \cap A_j)$, $j = 1, \cdots, n$ を用いて、$P(C|B)$ を表わせ。

$P(C|B \cap A_j)P(B|A_j)P(A_j) = P(C \cap B \cap A_j)$, $P(B|A_j)P(A_j) = P(B \cap A_j)$ より、

$$P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} P(C|B \cap A_j)P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}$$