第 1 回 事象と確率

鈴木 譲

1　事象

Ω: 集合

$\mathcal{F}$: Ω の部分集合からなる集合で、以下の (1)-(3) を満足するもの[*1]

$$A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bar{A} \in \mathcal{F} \tag{1}$$

$$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Longrightarrow A_1 \cup A_2 \cup \cdots \in \mathcal{F} \tag{2}$$

$$\Omega \in \mathcal{F} \tag{3}$$

例 1　空集合 $\{\}$ を ϕ とかくものとして、$\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{F} = \{\{0\}, \{1\}, \Omega, \phi\}$

例 2　$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \cdots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \Omega, \phi\}$ (要素が 2^6 個)

例 3　$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \Omega, \phi\}$

例 4　$\Omega =$ 実数全体, $\mathcal{F} = \{$ 負の実数全体, 正の実数全体, $\{0\}$, 非負実数全体, 非正実数全体, 非ゼロ実数全体, $\Omega, \phi\}$

Ω を標本空間、$\mathcal{F}$ の要素を事象とよぶ。また、事象 A, B が $A \cap B = \phi$ のとき、A, B は排反であるという。また、事象 $\bar{A}$ を、事象 A の余事象という。

例 5　$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ に対して

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\} \in \mathcal{F} \Longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}, \Omega, \phi \in \mathcal{F}$$

がいえる。

例 5 で、これらを含む最小の $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}, \Omega, \phi\}$$

を $\mathcal{F} =< \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\} >$ とかいて、$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}$ の生成する事象の集合とよぶ。

定理 1　$\phi \in \mathcal{F}$

証明: (1)(3) より、$\phi = \bar{\Omega} \in \mathcal{F}$ (証明終)

定理 2　$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \cap \cdots \in \mathcal{F}$

証明: (1)(2) より $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \cdots \in \mathcal{F}$。ド・モルガンの法則より、$\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \cdots = \overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots}$。さらに、(1) より、$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \in \mathcal{F}$ (証明終)

[*1] Ω はギリシャ文字のオメガ、$\mathcal{F}$ は花文字の F、$A \Longrightarrow B$ は「A ならば B」を意味する。

2 確率

標本空間 Ω と事象の集合 $\mathcal{F}$ をひとつに固定する。各 $A \in \mathcal{F}$ について

$$P(A) \geq 0 \ , \tag{4}$$

$$P(\Omega) = 1 \ , \tag{5}$$

さらに、排反である $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ について

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots \tag{6}$$

となるとき、P を確率、$P(A)$ を事象 $A \in \mathcal{F}$ の確率という。

例 6　$\Omega = \{1,2,3\}$, $A = \{1\}$, $B = \{3\}$, $C = \{2\}$ のとき、$P(A)$, $P(B)$ の値によって、それ以外の事象の確率がきまる。

$$\mathcal{F} = \{A, B, C, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}, \Omega, \phi\}$$

	$P(C)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cup B)$	$P(\bar{A} \cup \bar{B})$	$P(\bar{A})$	$P(B \cup C)$
$P(A) = 1/3, P(B) = 1/3$	1/3	1/3	2/3	1	2/3	2/3
$P(A) = 1/2, P(B) = 1/5$	3/10	3/10	7/10	1	1/2	1/2

例 7　$\Omega = \{1, 2, \cdots\}$, $\mathcal{F} =< \{1\}, \{2\}, \cdots >$, 各 $A \subseteq \Omega$ について、$P(A) = \sum_{n \in A} 2^{-n}$ とおくと、$P(A) \geq 0$、$P(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$、

$$A \cap B = \phi \Longrightarrow P(A) + P(B) = \sum_{n \in A} 2^{-n} + \sum_{n \in B} 2^{-n} = \sum_{n \in A \cup B} 2^{-n} = P(A \cup B)$$

となり、(4)(5)(6) が成立する。これは、おもてうらが等確率で生起するコインを何度か投げて、初めておもてが出るまでの回数に関する事象についての、確率を割り当てていることになる。たとえば、事象 $\{2\}$、事象 $\{1,3,5,\cdots\}$ は、それぞれ「1 回目がうらで 2 回目がおもてが生起」「奇数回目で初めておもてが生起」の事象になり、確率はそれぞれ $1/4$, $1/2 + 1/2^3 + \cdots = (1/2)/(1 - 1/4) = 2/3$ となる。

定理 3　$P(\phi) = 0$

証明: $\Omega \cup \phi = \Omega$ より、$P(\Omega \cup \phi) = P(\Omega) = 1$。また、$\Omega \cap \phi = \phi$ より、$P(\Omega \cup \phi) = P(\Omega) + P(\phi) = 1 + P(\phi)$。ここで、最初の等号には (6)、最後の等号には (5) を適用した。したがって、$1 + P(\phi) = 1$ より、$P(\phi) = 0$ (証明終)

定理 4　各 $A \in \mathcal{F}$ について、$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

証明: $A \cup \bar{A} = \Omega$ と (5) より、$P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$。また、$A \cap \bar{A} = \phi$ と (6) より、$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$。したがって、$P(A) + P(\bar{A}) = 1$ (証明終)

定理 5　$A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

証明:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \cup (B \cap \bar{A}) = A \cup B = B \\ A \cap (B \cap \bar{A}) = \phi \end{array} \right. \\ &\Longrightarrow P(B) = P(A \cup (B \cap \bar{A})) = P(A) + P(B \cap \bar{A}) \geq P(A) \end{aligned}$$

ここで、最後の等号には (6) を、最後の不等式には (4) を用いた。(証明終)

定理 6　$P(A) \leq 1$

証明: 定理 5 で、$B = \Omega$ とおくと、(5) より明らか。(証明終)

3　実数を標本空間にとる確率空間

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とよぶ。

標本空間として実数全体をとり、すべての区間とすべての孤立点で生成される事象の集合を考える。これが $\mathcal{F}$ が $(-\infty, b]$ の形の区間で生成されることを以下に示す。

(a, b), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, でそれぞれ、$a < x < b$, $a \leq x \leq b$, $a < x \leq b$, $a \leq x < b$, $a < x$, $a \leq x$, $x < b$, $x \leq b$ となる実数 x の集合とする。標本空間として、実数全体をとり、事象の集合 $\mathcal{F}$ が $(-\infty, b]$ の形のすべての区間で生成されるものを考える。たとえば、$(-\infty, -1.5], (-\infty, 2]$ なども $\mathcal{F}$ の要素とする。このとき、

このとき、$(a, \infty) = \overline{(-\infty, b]}$ の形の区間は $\mathcal{F}$ の要素になる。また、$(a, b] = (a, \infty) \cap (-\infty, b]$ の形の区間も $\mathcal{F}$ の要素になる。さらに、

$$(a, b) = (a, b - \frac{1}{1}] \cup (a, b - \frac{1}{2}] \cup (a, b - \frac{1}{3}] \cup \cdots$$

の形の区間も、$\{b\} = (a, b] \cap \overline{(a, b)}$ の形の区間 (孤立点) も、$[a, b) = (a, b) \cup \{a\}$ の形の区間も、$\mathcal{F}$ の要素となる。

すなわち、$(-\infty, b]$ の形のすべての区間で生成されるということは、すべての区間と、すべての孤立点で生成されることを意味する。そのような事象の集合 $\mathcal{F}$ を考える[*2]。たとえば、$[2, 5] \cup [10.5, 12.7] \cup \{15\}$ や、$\{1, 2, 3, \cdots\}$ なども $\mathcal{F}$ の要素になる。

例 8　区間 $\Omega = [0, 1]$ について、その中に含まれるボレル集合を事象の集合にとる。$0 \leq a \leq b \leq 1$ なる区間 $A = [a, b]$ で、確率が $P(A) = b - a$ となるようにとると、$P(A) \geq 0$, $P(\Omega) = P([0, 1]) = 1 - 0 = 1$, $A \cap B = \phi \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ が成立する ((4)(5)(6) が成立する)。

例 9　Ω を実数全体とするが、孤立点 $\{i\}$, $i = 1, 2, \cdots$ には確率 2^{-i}、それ以外では確率 0 とすると、たとえば、$P([1, 3]) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\})$ のようになる。したがって、$P(A) \geq 0$, $P(\Omega) = P(\{1, 2, \cdots\}) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1$, $A \cap B = \phi \Longrightarrow P(A \cup B) = \sum_{i \in A \cup B} = \sum_{i \in A} P(\{i\}) + \sum_{i \in B} P(\{i\})$ が成立する ((4)(5)(6) が成立する)。

[*2] (実数全体の) ボレル集合族といい、その各要素をボレル集合とよぶ。