補助資料1: 条件付き独立性の性質の証明

鈴木 譲

2017年4月10日

(1)

$$X \perp\!\!\!\perp Y|Z \Longleftrightarrow P(XYZ)P(Z)=P(XZ)P(YZ) \Longleftrightarrow Y \perp\!\!\!\perp X|Z$$

(2)

$$\begin{aligned} X \perp\!\!\!\perp \{Y,W\}|Z &\Longrightarrow P(XYZW)P(Z)=P(XZ)P(YZW) \\ &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(XYZ)P(Z)=P(XZ)P(YZ) \Longrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y|Z \\ P(XZW)P(Z)=P(XZ)P(ZW) \Longrightarrow X \perp\!\!\!\perp W|Z \end{array} \right. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} & X \perp\!\!\!\perp \{Y,W\}|Z \Longrightarrow X \perp\!\!\!\perp \{Y,W\}|Z, X \perp\!\!\!\perp Y|Z \\ \Longrightarrow\ & P(XYZW)P(Z)=P(XZ)P(YZW), P(XYZ)=P(XZ)P(YZ) \\ \Longrightarrow\ & P(XYZW)P(ZW)=P(XZW)P(YZW) \Longrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y|\{Z,W\} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} & X \perp\!\!\!\perp Y|Z, X \perp\!\!\!\perp W|\{Y,Z\} \\ \Longrightarrow\ & \\ \Longrightarrow\ & P(XYZW)P(Z)=P(XZ)P(YZW) \Longrightarrow X \perp\!\!\!\perp \{Y,W\}|Z \end{aligned}$$

(5)

$$\left\{ \begin{array}{l} X \perp\!\!\!\perp Y|\{Z,W\} \Longrightarrow P(XYZW)P(ZW)=P(XZW)P(YZW) \\ X \perp\!\!\!\perp W|\{Y,Z\} \Longrightarrow P(XYZW)P(YZ)=P(XYZ)P(YZW) \end{array} \right.$$

が成立する。仮定より、(X,Y,Z,W) の取りうる各値 (a,b,c,d) について

$$\frac{P(X=a,Y=b,Z=c,W=d)}{P(Y=b,Z=c,W=d)}=\frac{P(X=a,Y=b,Z=c)}{P(Y=b,Z=c)}=\frac{P(X=a,Z=c,W=d)}{P(Z=c,W=d)}$$

等式に挟まれた項が d によらない、最後の等式より右側の項が b によらなので、

$$\frac{P(X=a,Y=b,Z=c,W=d)}{P(Y=b,Z=c,W=d)}=\frac{P(X=a,Z=c)}{P(Z=c)}$$

すなわち、$P(X,Y,Z,W)P(Z)=P(XZ)P(YZW)$ を意味する。