鈴木讓「ベイジアンネットワーク入門」(培風館)
4. 確率的推論
4.1 確率分布の計算

鈴木讓

大阪大学

2010 年 7 月 29 日 (木) (1)

あらまし

1. 確率的推論
2. 因子グラフ
3. ビリーフ プロパゲーション
4. 最大事後確率設定

確率的推論

$X_i(\Omega) < \infty$, $i \in \mathcal{N} := \{1, \cdots, N\}$
$P_{X_1 \cdots X_N}(x_1, \cdots, x_N)$: $x_1 \in X_1(\Omega), \cdots, x_N \in X_N(\Omega)$ の確率

確率的推論

$$P_{X_i}(x_i) := \sum_{x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_N} P_{X_1 \cdots X_N}(x_1, \cdots, x_N) \qquad (1)$$

を計算 (N とともに指数的な計算が必要)

確率変数 2 個以上でも同様:

$$P_{X_i X_j}(x_i, x_j) := \sum_{x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_N} P_{X_1 \cdots X_N}(x_1, \cdots, x_N)$$

例 4.1: 銃による殺人事件で 3 人が容疑

$X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

X_0: 裁判所での証言

X_1: 犯人が誰であったか

X_2: 指紋が誰のものであったか

X_3 で指紋の調査結果

$$P_{X_2|X_1}(\cdot|\cdot) := \begin{bmatrix} P_{X_2|X_1}(1|1) & P_{X_2|X_1}(2|1) & P_{X_2|X_1}(3|1) \\ P_{X_2|X_1}(1|2) & P_{X_2|X_1}(2|2) & P_{X_2|X_1}(3|2) \\ P_{X_2|X_1}(1|3) & P_{X_2|X_1}(2|3) & P_{X_2|X_1}(3|3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$$

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3$$

例 4.1: 証言 $X_0 = e_0$ が得られると

$$P_{X_1|X_0}(\cdot|e_0) := [P_{X_1|X_0}(1|e_0), P_{X_1|X_0}(2|e_0), P_{X_1|X_0}(3|e_0)] = [p_1, p_2, p_3]$$

$$\begin{aligned}
P_{X_2|X_0}(\cdot|e_0) &\propto P_{X_1|X_0}(\cdot|e_0) \times P_{X_2|X_1}(\cdot|\cdot) \\
&= [p_1, p_2, p_3] \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \\
&= \left[\sum_{i=1}^{3} p_i q_{i1}, \sum_{i=1}^{3} p_i q_{i2}, \sum_{i=1}^{3} p_i q_{i3} \right]
\end{aligned}$$

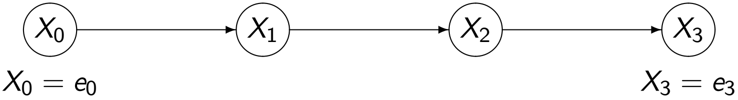
$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3$$

$X_0 = e_0$

例 4.1: 指紋調査の結果が届く前

$$P_{X_3|X_2}(e_3|\cdot) := [P_{X_3|X_2}(e_3|1), P_{X_3|X_2}(e_3|2), P_{X_3|X_2}(e_3|3)] \propto [1,1,1]$$

$$\begin{aligned} P_{X_2|X_0,X_3}(\cdot|e_0,e_3) &\propto P_{X_2|X_0}(\cdot|e_0) \times P_{X_3|X_2}(e_3|\cdot) \\ &= \left[\sum_{i=1}^{3} p_i q_{i1} \times 1, \sum_{i=1}^{3} p_i q_{i2} \times 1, \sum_{i=1}^{3} p_i q_{i3} \times 1\right] \end{aligned}$$



例 4.1: 指紋調査の結果が届くと

$$P_{X_3|X_2}(e_3|\cdot) \propto [r_1, r_2, r_3]$$

$$\begin{aligned} P_{X_2|X_0X_3}(\cdot|e_0, e_3) &\propto P_{X_2|X_0}(\cdot|e_0) \times P_{X_3|X_2}(e_3|\cdot) \\ &= \left[\sum_{i=1}^{3} p_i q_{i1} \times r_1, \sum_{i=1}^{3} p_i q_{i2} \times r_2, \sum_{i=1}^{3} p_i q_{i3} \times r_3\right] \end{aligned}$$

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3$$

$X_0 = e_0$ $\qquad$ $X_3 = e_3$

例 4.1: 指紋調査の結果が届くと (続)

$$P_{X_3|X_1}(e_3|\cdot) \propto \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{3} q_{1j} r_j \\ \sum_{j=1}^{3} q_{2j} r_j \\ \sum_{j=1}^{3} q_{3j} r_j \end{bmatrix}$$

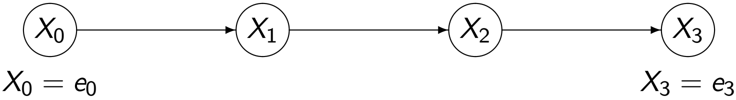
$$\begin{aligned} P_{X_1|X_0 X_3}(\cdot|e_0, e_3) &\propto P_{X_3|X_1}(e_3|\cdot) \times P_{X_1|X_0}(\cdot|e_0) \\ &= \left[\sum_{j=1}^{3} q_{1j} r_j \times p_1, \sum_{j=1}^{3} q_{2j} r_j \times p_2, \sum_{j=1}^{3} q_{3j} r_j \times p_3\right], \end{aligned}$$

例 4.1: 容疑者 1 に強いアリバイがあることわかると

$$P_{X_1|X_0}(\cdot|e_0) = [p_1, p_2, p_3] \to P_{X_1|X_0}(\cdot|e_0) = [p'_1, p'_2, p'_3]$$

$$P_{X_2|X_0}(\cdot|e_0) = [p'_1, p'_2, p'_3] \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{3} p'_i q_{i1}, \sum_{i=1}^{3} p'_i q_{i2}, \sum_{i=1}^{3} p'_i q_{i3} \right]$$



例 4.1: 容疑者 1 に強いアリバイがあることわかると (続)

$$P_{X_1|X_0X_3}(\cdot|e_0, e_3) \propto P_{X_1|X_0}(\cdot|e_0) \times P_{X_3|X_1}(e_3|\cdot)$$
$$= \left[p_1' \times \sum_{j=1}^{3} q_{1j} r_j, p_2' \times \sum_{j=1}^{3} q_{2j} r_j, p_3' \times \sum_{j=1}^{3} q_{3j} r_j\right],$$

$$P_{X_2|X_0X_3}(\cdot|e_0, e_3) \propto P_{X_2|X_0}(\cdot|e_0) \times P_{X_3|X_2}(e_3|\cdot)$$
$$= \left[\sum_{i=1}^{3} p_i' q_{i1} \times r_1, \sum_{i=1}^{3} p_i' q_{i2} \times r_2, \sum_{i=1}^{3} p_i' q_{i3} \times r_3\right]$$

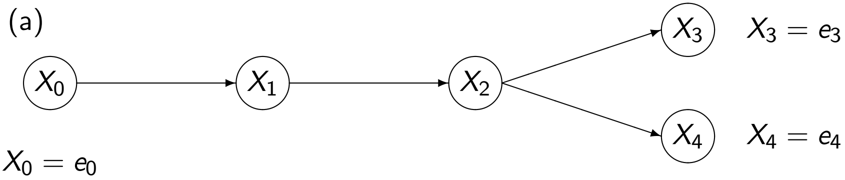
例 4.2: (1) 別の指紋研究所での調査結果 $X_4 = e_4$

$$P_{X_4|X_2}(e_4|\cdot) := [P_{X_4|X_2}(e_4|1), P_{X_4|X_2}(e_4|2), P_{X_4|X_2}(e_4|3)] \propto [s_1, s_2, s_3]$$

$$P_{X_3X_4|X_2}(e_3, e_4|\cdot) := [P(e_3, e_4|1), P(e_3, e_4|2), P(e_3, e_4|3)] \propto [r_1 s_1, r_2 s_2, r_3 s_3]$$

$$\begin{aligned} & P_{X_2|X_0X_3X_4}(\cdot|e_0, e_3, e_4) \\ \propto \quad & \left[\sum_{i=1}^{3} p_i' q_{i1} \times r_1 s_1, \sum_{i=1}^{3} p_i' q_{i2} \times r_2 s_2, \sum_{i=1}^{3} p_i' q_{i3} \times r_3 s_3 \right] \end{aligned}$$

(a)



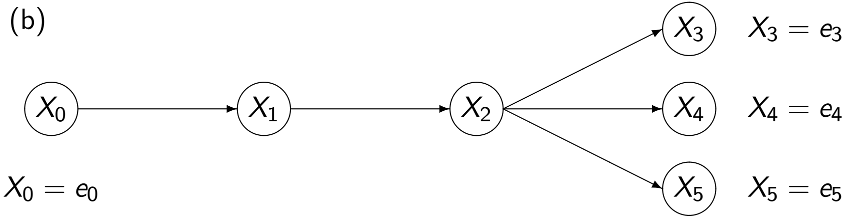
例 4.2: (2) 容疑者 2 が「指紋は私のものです」と主張して、$X_5 = e_5$

$$P_{X_5|X_2}(e_5|\cdot) := [P_{X_5|X_2}(e_5|1), P_{X_5|X_2}(e_5|2), P_{X_5|X_2}(e_5|3)] \propto [0, 1, 0]$$

$$P_{X_3X_4X_5|X_2}(e_3, e_4, e_5|\cdot) \quad \propto \quad [r_1 s_1 \times 0, r_2 s_2 \times 1, r_3 s_3 \times 0]$$

$$P_{X_3X_4X_5|X_2}(e_3, e_4, e_5|\cdot) = [0, 1, 0]$$

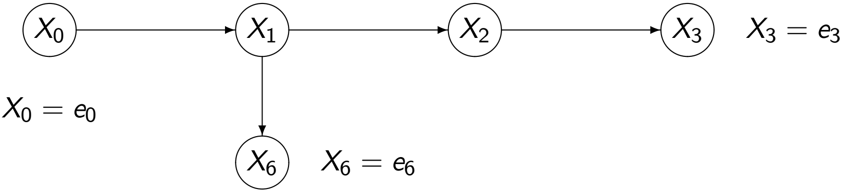
(b)



例 4.2: (3) 容疑者 1 のアリバイ $X_6 = e_6$ という証拠

$$P_{X_6|X_1}(e_6|\cdot) := [P_{X_6|X_1}(e_6|1), P_{X_6|X_1}(e_6|2), P_{X_6|X_1}(e_6|3)] \propto [t_1, t_2, t_3]$$

(c)



例 4.2: (3) 容疑者 1 のアリバイ $X_6 = e_6$ という証拠 (続)

$$\begin{aligned} P_{X_3X_6|X_1}(e_3, e_6|\cdot) &\propto P_{X_3|X_1}(e_3|\cdot) \times P_{X_6|X_1}(e_6|\cdot) \\ &= \left[\sum_{j=1}^{3} q_{1j}r_j \times t_1, \sum_{j=1}^{3} q_{2j}r_j \times t_2, \sum_{j=1}^{3} q_{3j}r_j \times t_3\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P_{X_1|X_0X_3X_6}(\cdot|e_0, e_3, e_6) \\ \propto\ & P_{X_1|X_0}(\cdot|e_0) \times P_{X_3X_6|X_1}(e_3, e_6|\cdot) \\ =\ & \left[\sum_{j=1}^{3} t_1q_{1j}r_j \times p'_1, \sum_{j=1}^{3} t_2q_{2j}r_j \times p'_2, \sum_{j=1}^{3} t_3q_{3j}r_j \times p'_3\right] \end{aligned}$$

因子グラフ

$\mathcal{M}$: 有限集合
$\mathcal{N}(a) \subseteq \mathcal{N},\ a \in \mathcal{M}$

$$P_{X_1 \cdots X_N}(x_1, \cdots, x_N) = \frac{1}{Z} \prod_{a \in \mathcal{M}} f_a(x_i, i \in \mathcal{N}(a)), \tag{2}$$

$$Z := \sum_{x_i, i \in \mathcal{N}} \prod_{a \in \mathcal{M}} f_a(x_i, i \in \mathcal{N}(a))$$

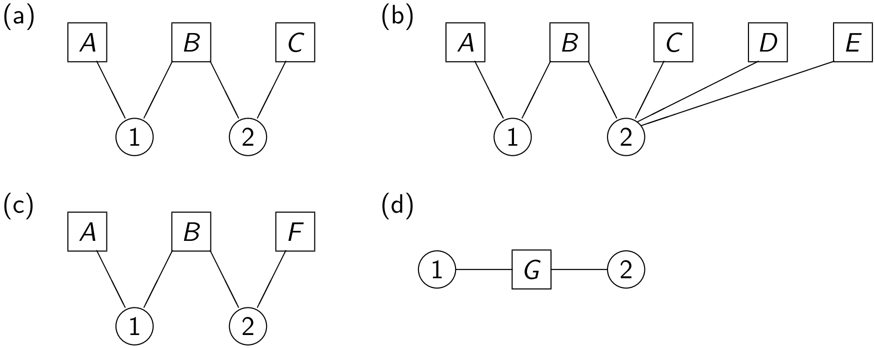
- **変数頂点** $\mathcal{N} = \{1, \cdots, N\}$ の要素
- **因子頂点** $\mathcal{M}$ の要素
- **辺** $\{(i, a) \mid i \in \mathcal{N}(a), a \in \mathcal{M}\}$ の要素

$i \in \mathcal{N}$ と辺で結ばれた因子頂点の集合を $\mathcal{M}(i) \subseteq \mathcal{M}$ であらわすと、

$$\{(i, a) \mid i \in \mathcal{N}(a), a \in \mathcal{M}\} = \{(i, a) \mid i \in \mathcal{N}, a \in \mathcal{M}(i)\}$$

因子グラフ (続)

(2) を、変数頂点○、因子頂点□、およびそれらを結ぶ辺で表す



因子グラフの例

(a)

$$
\begin{aligned}
& P_{X_0X_1X_2X_3}(e_0, x_1, x_2, e_3) \\
= \quad & P_{X_0}(e_0)P_{X_1|X_0}(x_1|e_0)P_{X_2|X_3}(x_2|x_3)P_{X_3|X_2}(e_3|x_2) \\
= \quad & f_A(x_1)f_B(x_1, x_2)f_C(x_2) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

$\mathcal{N} = \{1, 2\}$, $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$, $\mathcal{N}(A) = \{1\}$, $\mathcal{N}(B) = \{1, 2\}$, $\mathcal{N}(C) = \{1, 2\}$

(b)

$$
\begin{aligned}
& P_{X_0X_1X_2X_3X_4X_5}(e_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\
= \quad & P_{X_0}(e_0)P_{X_1|X_0}(x_1|e_0)P_{X_2|X_3}(x_2|x_3)P_{X_3|X_2}(e_3|x_2) \\
& \cdot P_{X_4|X_2}(e_4|x_2)P_{X_5|X_2}(e_5|x_2) \\
= \quad & f_A(x_1)f_B(x_1, x_2)f_C(x_2)f_D(x_2)f_E(x_2) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

$\mathcal{N} = \{1, 2\}, \mathcal{M} = \{A, B, C, D, E\}$,
$\mathcal{N}(A) = \{1\}, \mathcal{N}(B) = \{1, 2\}, \mathcal{N}(C) = \mathcal{N}(D) = \mathcal{N}(E) = \{2\}$

因子グラフの例 (続)

(4) で $f_F(x_2) := f_C(x_2)f_D(x_2)f_E(x_2)$ とおくと、

$$P_{X_0X_1X_2X_3X_4X_5}(e_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f_A(x_1)f_B(x_1, x_2)f_F(x_2)$$

$f_G(x_1, x_2) := f_A(x_1)f_B(x_1, x_2)f_F(x_2)$ とおくと、

$$P_{X_0X_1X_2X_3X_4X_5}(e_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f_G(x_1, x_2)$$

巡回経路

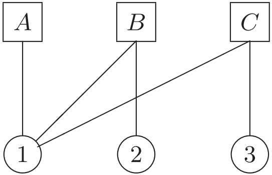
巡回経路

異なる 2 因子頂点を結ぶ辺の列が 2 個以上存在

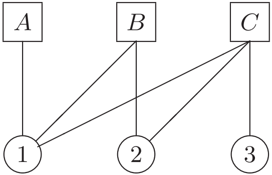
$$P_{X_1}(x_1)P_{X_2|X_1}(x_2|x_1)P_{X_3|X_2}(x_3|x_2) = f_A(x_1)f_B(x_1,x_2)f_C(x_2,x_3)$$

$$P_{X_1}(x_1)P_{X_2|X_1}(x_2|x_1)P_{X_3|X_1,X_2}(x_3|x_1,x_2) = f_A(x_1)f_B(x_1,x_2)f_C(x_1,x_2,x_3)$$

(a)



(b)



アルゴリズム 4.1

$i \in \mathcal{N}$, $a \in \mathcal{M}$
$n_{i\to a}$, $m_{a\to i}$: $\mathcal{X}_i$ から非負実数への写像

$$n_{i\to a}(x_i) := 1,\ m_{a\to i}(x_i) := 1,\ x_i \in \mathcal{X}_i$$

$$n_{i\to a}(x_i) := \prod_{c\in\mathcal{M}(i)\setminus\{a\}} m_{c\to i}(x_i), \tag{5}$$

$$m_{a\to i}(x_i) := \sum_{\mathbf{x}_{a,i}\in\mathcal{X}_{a,i}} f_a(\mathbf{x}_a) \prod_{j\in\mathcal{N}(a)\setminus\{i\}} n_{j\to a}(x_j) \tag{6}$$

$\mathcal{X}_{a,i}$: x_j, $j \in \mathcal{N}(a)\setminus\{i\}$ のとり得る値

アルゴリズム 4.1

$n_{i\to a}(x_i) := 1$, $m_{a\to i}(x_i) := 1$, $x_i \in \mathcal{X}_i$ とおき、各 $(i,a) \in \mathcal{N}\times\mathcal{M}$ に対して，毎回同時に (5), (6) を適用して，$n_{i\to a}(x_i)$, $m_{a\to i}(x_i)$ を更新

アルゴリズム 4.1 (続)

(5) より、$\{m_{a\to i}(x_i)\}$ だけで (5),(6) を更新してもよい:

$$m_{a\to i}(x_i) := \sum_{\mathbf{x}_{a,i}\in\mathcal{X}_{a,i}} f_a(\mathbf{x}_a) \prod_{j\in\mathcal{N}(a)\backslash\{i\}} \prod_{c\in\mathcal{M}(j)\backslash\{a\}} m_{c\to j}(x_j) \tag{7}$$

メッセージ

$\{n_{i\to a}(x_i)\}$, $\{m_{a\to i}(x_i)\}$, $x_i \in \mathcal{X}_i$

定理 4.1

定理 4.1

因子グラフが巡回経路を含まないとき、アルゴリズム 1 において (5), (6) の有限回の適用で $\{n_{i\to a}(x_i)\}$, $\{m_{a\to i}(x_i)\}$ が一定値に収束

その収束値について、

$$b_i(x_i) \propto \prod_{a\in N(i)} m_{a\to i}(x_i), \tag{8}$$

$$\sum_{x_i\in\mathcal{X}_i} b_i(x_i) = 1 \tag{9}$$

を満足する $b_i(x_i)$ は，$P_{X_i}(x_i)$ に等しい。

定理 4.1 (続)

$$b_a(\mathbf{x}_a) \propto f_a(\mathbf{x}_a) \prod_{i \in N(a)} n_{i \to a}(x_i), \tag{10}$$

$$\sum_{\mathbf{x}_a \in \mathcal{X}_a} b_a(\mathbf{x}_a) = 1 \tag{11}$$

を満足する $b_a(\mathbf{x}_a)$ は，$P_{\mathbf{X}_a}(\mathbf{x}_a) := P_{X_j, j \in \mathcal{N}(a)}(x_j, j \in \mathcal{N}(a))$ に等しい。

$$\sum_{\mathbf{x}_{a,i} \in \mathcal{X}_{a,i}} b_a(\mathbf{x}_a) = b_i(x_i) \tag{12}$$

ビリーフ

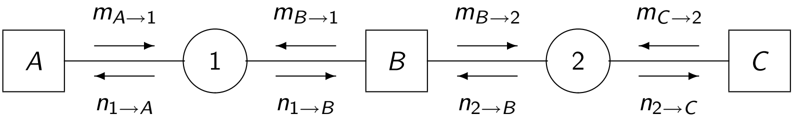
$\{b_i(x_i)\}_{i \in N}$, $\{b_a(\mathbf{x}_a)\}_{a \in M}$

ビリーフの値が更新されることを**ビリーフプロパゲーション**という

例 4.5

例 4.1 で

$f_A(x_1) := P_{X_0}(e_0)P_{X_1|X_0}(x_1|e_0)$
$f_B(x_1, x_2) := P_{X_2|X_1}(x_2|x_1)$
$f_C(x_2) := P_{X_3|X_2}(e_3|x_2)$

(a)


例 4.5 (続)

$$
\begin{aligned}
n_{2\to B}(x_2) &= m_{C\to 2}(x_2), \\
n_{1\to A}(x_1) &= m_{B\to 1}(x_1), \\
n_{1\to B}(x_1) &= m_{A\to 1}(x_1), \\
n_{2\to C}(x_2) &= m_{B\to 2}(x_2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{A\to 1}(x_1) &= f_A(x_1) = P_{X_0}(e_0)P_{X_1|X_0}(x_1|e_0), \\
m_{B\to 2}(x_2) &= \sum_{x_1} f_B(x_1,x_2)n_{1\to B}(x_1) = \sum_{x_1} f_B(x_1,x_2)m_{A\to 1}(x_1) \\
&= \sum_{x_1} P_{X_0}(e_0)P_{X_1|X_0}(x_1|e_0)P_{X_2|X_1}(x_2|x_1),
\end{aligned}
$$

例 4.5 (続)

$$\begin{aligned} m_{C\to 2}(x_2) &= f_C(x_2) = P_{X_3|X_2}(e_3|x_2), \\ m_{B\to 1}(x_1) &= \sum_{x_2} f_B(x_1, x_2) n_{2\to B}(x_2) = \sum_{x_2} f_B(x_1, x_2) m_{C\to 2}(x_1) \\ &= \sum_{x_2} P_{X_2|X_1}(x_2|x_1) P_{X_3|X_2}(e_3|x_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1(x_1) &\propto m_{A\to 1}(x_1) m_{B\to 1}(x_1) \\ &= P_{X_0}(e_0) P_{X_1|X_0}(x_1|e_0) \sum_{x_2} P_{X_2|X_1}(x_2|x_1) P_{X_3|X_2}(e_3|x_2) \\ b_2(x_2) &\propto m_{B\to 2}(x_2) m_{C\to 2}(x_2) \\ &= \sum_{x_1} P_{X_0}(e_0) P_{X_1|X_0}(x_1|e_0) P_{X_2|X_1}(x_2|x_1) P_{X_3|X_2}(e_3|x_2) \end{aligned}$$

例 4.5 (続)

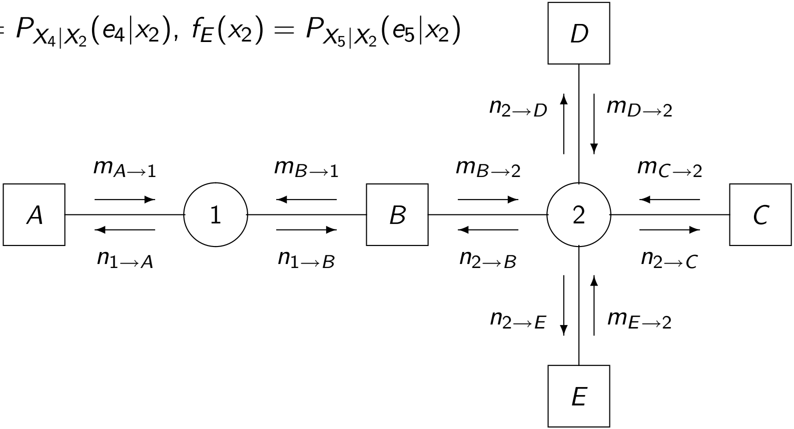
$$
\begin{aligned}
b_A(x_A) &\propto f_A(x_1) n_{1\to A}(x_1) \\
&= P_{X_0}(e_0) P_{X_1|X_0}(x_1|e_0) \sum_{x_2} P_{X_2|X_1}(x_2|x_1) P_{X_3|X_2}(e_3|x_2), \\
b_B(x_B) &\propto f_B(x_1, x_2) n_{1\to B}(x_1) n_{2\to B}(x_2) \\
&= P_{X_0}(e_0) P_{X_1|X_0}(x_1|e_0) P_{X_2|X_1}(x_2|x_1) P_{X_3|X_2}(e_3|x_2), \\
b_C(x_C) &\propto f_C(x_2) n_{2\to C}(x_2) \\
&= \sum_{x_1} P_{X_0}(e_0) P_{X_1|X_0}(x_1|e_0) P_{X_2|X_1}(x_2|x_1) P_{X_3|X_2}(e_3|x_2).
\end{aligned}
$$

例 4.5 (続)

例 4.2

$f_D(x_2) = P_{X_4|X_2}(e_4|x_2),\ f_E(x_2) = P_{X_5|X_2}(e_5|x_2)$

(b)



例 4.5 (続)

$$m_{D\to 2}(x_2) = f_D(x_2) = P_{X_4|X_2}(e_4|x_2),$$
$$m_{E\to 2}(x_2) = f_E(x_2) = P_{X_5|X_2}(e_5|x_2),$$

$$\begin{aligned}
n_{2\to B}(x_2) &= m_{C\to 2}(x_2)m_{D\to 2}(x_2)m_{E\to 2}(x_2) \\
&= P_{X_3|X_2}(e_3|x_2)P_{X_4|X_2}(e_4|x_2)P_{X_5|X_2}(e_5|x_2), \\
n_{2\to C}(x_2) &= m_{B\to 2}(x_2)m_{D\to 2}(x_2)m_{E\to 2}(x_2), \\
n_{2\to D}(x_2) &= m_{B\to 2}(x_2)m_{C\to 2}(x_2)m_{E\to 2}(x_2), \\
n_{2\to E}(x_2) &= m_{B\to 2}(x_2)m_{C\to 2}(x_2)m_{D\to 2}(x_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2(x_2) &\propto m_{B\to 2}(x_2)m_{C\to 2}(x_2)m_{D\to 2}(x_2)m_{E\to 2}(x_2) \\
&= \sum_{x_1} P_{X_0}(e_0)P_{X_1|X_0}(x_1|e_0)P_{X_2|X_1}(x_2|x_1) \\
&\qquad \cdot P_{X_3|X_2}(e_3|x_2)P_{X_4|X_2}(e_4|x_2)P_{X_5|X_2}(e_5|x_2)
\end{aligned}$$

アルゴリズム 4.2

定理 4.1 は，アルゴリズム 4.2 でも成立する:
$n_{i\to a}(x_i) := 1,\ m_{a\to i}(x_i) := 1,\ x_i \in \mathcal{X}_i$

アルゴリズム 4.2

$(i, a) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$ に対して事前に更新する順序を決めておく。1 回に 1 つの (i, a) について (5), (6) を適用して，$n_{i\to a}(x_i), m_{a\to i}(x_i)$ を更新

定理 4.2

因子グラフが巡回経路を含まないとき、アルゴリズム 2 において (5), (6) の有限回の適用で $\{n_{i\to a}(x_i)\}, \{m_{a\to i}(x_i)\}$ が一定値に収束

巡回経路を含むとき、定理 4.2 は成立しない

- 収束しない
- 収束しても，$b_a = P_{X_a}, b_i = P_{X_i}$ などが成立しない

例: f_D を定数として、

$$P_{X_1X_2X_3}(x_1, x_2, x_3) = f_A(x_1, x_2) f_B(x_1, x_3) f_C(x_2, x_3) f_D,$$

$$f_A(x_1, x_2) = \begin{cases} (1-\epsilon)/2, & x_1 = x_2 \\ \epsilon/2, & x_1 \neq x_2, \end{cases}$$

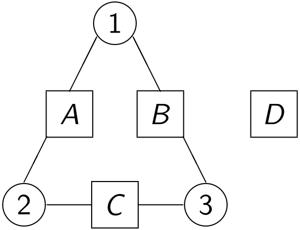
$$f_B(x_1, x_3) = \begin{cases} (1-\epsilon)/2, & x_1 = x_3 \\ \epsilon, & x_1 \neq x_3, \end{cases}$$

$$f_C(x_2, x_3) = \begin{cases} \epsilon/2, & x_2 = x_3 \\ (1-\epsilon)/2, & x_2 \neq x_3 \end{cases}$$

巡回経路を含むとき、定理 4.1, 4.2 は成立しない (続)

$$\begin{aligned} b_A(x_1, x_2) &= P_{X_1X_2}(x_1, x_2) \\ b_B(x_1, x_3) &= P_{X_1X_3}(x_1, x_3) \\ b_C(x_2, x_3) &= P_{X_2X_3}(x_2, x_3) \end{aligned}$$

が同時に成立しない。



巡回経路を含むとき、定理 4.1, 4.2 は成立しない (続)

$m_{A\to 1}(x_1)=m_{B\to 1}(x_1)=1,\ m_{A\to 2}(x_2)=m_{C\to 2}(x_2)=1,$
$m_{B\to 3}(x_3)=m_{C\to 3}(x_3)=1,\ x_1\in\mathcal{X}_1,\ x_2\in\mathcal{X}_2,\ x_3\in\mathcal{X}_3$

$$m_{A\to 1}(x_1)=\sum_{x_2\in\mathcal{X}_2} f_A(x_1,x_2)m_{C\to 2}(x_2)=1$$

となり、すべての $a=A,B,C$, $i=1,2,3$ で $m_{a\to i}(x_i)$ の値が変更されることなく，$b_i(x_i)=\frac{1}{2}$, $i=1,2,3$ に収束

$$\begin{aligned} b_A(x_1,x_2) &= P_{X_1X_2}(x_1,x_2)\\ b_B(x_1,x_3) &= P_{X_1X_3}(x_1,x_3)\\ b_C(x_2,x_3) &= P_{X_2X_3}(x_2,x_3) \end{aligned}$$

が同時に成立しない。

巡回経路を含むとき、定理 4.1,4.2 は成立しない (続)

$$b_A(x_1,x_2) = f_A(x_1,x_2)m_{B\to 1}(x_1)m_{C\to 2} = f_A(x_1,x_2), \tag{14}$$

$$b_B(x_1,x_3) = f_B(x_1,x_3)m_{A\to 1}(x_1)m_{C\to 3} = f_B(x_1,x_3), \tag{15}$$

$$b_C(x_2,x_3) = f_C(x_2,x_3)m_{A\to 2}(x_2)m_{B\to 3} = f_C(x_2,x_3) \tag{16}$$

$$\begin{aligned} P_{X_1X_2X_3}(0,1,0) + P_{X_1X_2X_3}(0,1,1) &= \epsilon/2, \\ P_{X_1X_2X_3}(1,0,0) + P_{X_1X_2X_3}(1,0,1) &= \epsilon/2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{X_1X_2X_3}(0,0,1) + P_{X_1X_2X_3}(0,1,1) &= \epsilon/2, \\ P_{X_1X_2X_3}(1,0,0) + P_{X_1X_2X_3}(1,1,0) &= \epsilon/2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{X_1X_2X_3}(0,0,0) + P_{X_1X_2X_3}(1,0,0) &= \epsilon/2, \\ P_{X_1X_2X_3}(0,1,1) + P_{X_1X_2X_3}(1,1,1) &= \epsilon/2 \end{aligned}$$

特に $\epsilon < 1/3$ のとき、

$$\sum_{x_1\in\mathcal{X}_1,x_2\in\mathcal{X}_2,x_3\in\mathcal{X}_3} P_{X_1X_2X_3}(x_1,x_2,x_3) < 1$$

最大事後確率設定

最大事後確率設定

$$P_{X_1\cdots X_N}(x_1,\cdots,x_N) := \max_{x_1,\cdots,x_N} P_{X_1\cdots X_N}(x_1,\cdots,x_N)$$

を最大にする $x_1 \in \mathcal{X}_1,\cdots,x_N \in \mathcal{X}_N$ を見いだす

$$n'_{i\to a}(x_i) := 1,\ \ m'_{a\to i}(x_i) := 1,\ \ x_i \in \mathcal{X}_i$$

$$n'_{i\to a}(x_i) := \prod_{c\in\mathcal{M}(i)\backslash\{a\}} m'_{c\to i}(x_i), \tag{17}$$

$$m'_{a\to i}(x_i) := \max_{\mathbf{x}_{a,i}\in\mathcal{X}_{a,i}} f_a(\mathbf{x}_a) \prod_{j\in\mathcal{N}(a)\backslash\{i\}} n'_{j\to a}(x_j) \tag{18}$$

アルゴリズム 4.3

$n'_{i\to a}(x_i) := 1$, $m'_{a\to i}(x_i) := 1$, $x_i \in \mathcal{X}_i$ とおき、$(i,a) \in \mathcal{N}\times\mathcal{M}$ に対して，毎回同時に (17), (18) を適用して，$n'_{i\to a}(x_i)$, $m'_{a\to i}(x_i)$ を更新

定理 4.3

定理 4.3

因子グラフが巡回経路を含まないとき，アルゴリズム 4.3 で (17), (18) の有限回の適用で $\{n'_{i\to a}(x_i)\}$, $\{m'_{a\to i}(x_i)\}$ が一定値に収束し、

収束値について，

$$b'_i(x_i) \propto \prod_{a\in N(i)} m'_{a\to i}(x_i) \tag{19}$$

を最大にする $x_i \in \mathcal{X}_i$ は，$P'_{X_i}(x_i) := \max_{x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_N} P_{X_1\cdots X_N}(x_1,\cdots,x_N)$ を最大にする $x_i \in \mathcal{X}_i$ に等しく，

$$b'_a(\mathbf{x}_a) \propto f_a(\mathbf{x}_a) \prod_{i\in N(a)} n'_{i\to a}(x_i) \tag{20}$$

を最大にする $\mathbf{x}_a \in \mathcal{X}_a$ は，$P'_{\mathbf{X}_a}(\mathbf{x}_a) := \max_{x_j, j\notin \mathcal{N}(a)} P_{X_1\cdots X_N}(x_1,\cdots,x_N)$ を最大にする $\mathbf{x}_a \in \mathcal{X}_a$ に等しい。