補足: $z_j \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, $r_j \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ の証明

鈴木 讓

平成 22 年 7 月 17 日

$$\hat{\alpha} = (\mathbf{X}_p^T \mathbf{X}_p)^{-1} \mathbf{X}_p^T \mathbf{y}$$

に $\mathbf{y} = \mathbf{X}_p \alpha + \epsilon$ を代入して、

$$\mathbf{X}_p \hat{\alpha} - \mathbf{X}_p \alpha \sim \mathbf{X}_p (\mathbf{X}_p^T \mathbf{X}_p)^{-1} \mathbf{X}_p^T \epsilon = P_p \epsilon$$

$$(I - P_p)\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{X}_p \hat{\alpha} = \mathbf{y} - \mathbf{X}_p \alpha - \{\mathbf{X}_p \hat{\alpha} - \mathbf{X}_p \alpha\} = (I - P_p)\epsilon$$

$$\mathbf{u}_j^T \mathbf{y} = \mathbf{u}_j^T \epsilon$$

となる。したがって、任意に $\{(x_{i,1}, \cdots, x_{i,p})\}_{i=1}^n$ が与えられたもとで、$\sum_{i=1}^n u_{i,j}^2 = 1$ かつ $\sum_{i=1}^n u_{i,j} u_{i,k} = 0$ $(j \neq k)$ となるので、$\mathbf{u}_j^T \epsilon$ の各成分は独立で、$\mathcal{N}(0,1)$ にしたがう。

他方、$\mathbf{z} := \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}$, $\mathbf{r} := \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_q \end{bmatrix}$, $U = [\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m]$, $V = [\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_q]$ とおくと、

$$\mathbf{r} = V^T \mathbf{y} = V^T U U^T \mathbf{y} = V^T U \mathbf{z}$$

となる。したがって、任意に $\{(x_{i,1}, \cdots, x_{i,p})\}_{i=1}^n$ が与えられたもとで、$V^T U = (w_{i,j})$ は、$\sum_{i=1}^n w_{i,j}^2 = 1$ かつ $\sum_{i=1}^n w_{i,j} u_{i,k} = 0$ $(j \neq k)$ となるので、$\mathbf{r}$ の各成分は独立で、$\mathcal{N}(0,1)$ にしたがう。