鈴木譲「ベイジアンネットワーク入門」(培風館)
3. 統計的学習
3.4 条件付確率の推定 (2) 情報量基準の適用

鈴木譲

大阪大学

2010 年 6 月 24 日

あらまし

情報量基準の適用

定理 3.6

定理 3.7

情報量基準

$\mathcal{Y} := Y(\Omega)$

経験的エントロピー: 例の状態分割 $\mathcal{S}$ への適合度

$$\mathcal{H}^{(\mathcal{S})}(z^n) := \sum_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{H}_s(z^n)$$

パラメータ数: 状態分割 $\mathcal{S}$ の簡潔性

$$K(\mathcal{S}) := (|\mathcal{Y}| - 1)|\mathcal{S}|$$

情報量基準

$$IC^{(\mathcal{S})}(z^n) := \mathcal{H}^{(\mathcal{S})}(z^n) + \frac{K(\mathcal{S})}{2} d_n \tag{30}$$

情報量基準 (続)

$\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$: 非負実数列

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{d_n}{n} = 0 \tag{31}$$

(31) を満足する実数列 $\{d_n\} = \{d_n^{(1)}\}, \{d_n^{(2)}\}$

1. $\liminf_{n\to\infty} (d_n^{(1)}/d_n^{(2)}) > 1 \Longrightarrow \{d_n^{(1)}\} \succ \{d_n^{(2)}\}$
2. $\limsup_{n\to\infty} (d_n^{(1)}/d_n^{(2)}) < 1 \Longrightarrow \{d_n^{(1)}\} \prec \{d_n^{(2)}\}$
3. $\lim_{n\to\infty} (d_n^{(1)}/d_n^{(2)}) = 1 \Longrightarrow \{d_n^{(1)}\} = \{d_n^{(2)}\}$

- $d_n = \log n \Longrightarrow L^{(\mathcal{S})}(z^n)$ (MDL 基準)
- $d_n = 2 \Longrightarrow$ AIC(Akaike's information criterion)

定理 3.6

$$A_n \sim B_n \overset{def}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} A_n/B_n = 1$$

$$\Gamma_x(\alpha) := \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

定理 (Suzuki, 2006)

各 $\mathcal{S} \in Over(\mathcal{S}^*)$ で

$$\mu\{z^n \mid IC^{(\mathcal{S})}(z^n) < IC^{(\mathcal{S}^*)}(z^n)\} \sim 1 - \frac{\Gamma_{\frac{K(\mathcal{S})-K(\mathcal{S}^*)}{2} d_n}\left(\frac{K(\mathcal{S})-K(\mathcal{S}^*)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{K(\mathcal{S})-K(\mathcal{S}^*)}{2}\right)} \tag{32}$$

証明の概略

$$\begin{aligned}
&\mu\{z^n \mid IC^{(\mathcal{S}}(z^n) < IC^{(\mathcal{S}^*)}(z^n)\} \\
&\qquad = \mu\left\{z^n \mid 2\{\mathcal{H}^{(\mathcal{S}^*)}(z^n) - \mathcal{H}^{(\mathcal{S})}(z^n)\} > [K(\mathcal{S}) - K(\mathcal{S}^*)]d_n\right\},
\end{aligned}$$

f_l: χ_l^2 の確率密度関数

$$\int_x^\infty f_l(t)\,dt = 1 - \frac{\Gamma_{x/2}(l/2)}{\Gamma(l/2)}$$

各 $\mathcal{S} \in Over(\mathcal{S}^*)$ で以下を示せば十分:

$$2\{\mathcal{H}^{(\mathcal{S}^*)}(z^n) - \mathcal{H}^{(\mathcal{S})}(z^n)\} \sim \chi^2_{K(\mathcal{S})-K(\mathcal{S}^*)}$$

証明の概略 (続)

$\mathcal{S} \in \mathit{Over}(\mathcal{S}^*)$
$t \in \mathcal{S}^*$
$\mathcal{S}(t) := \{t \cap s \mid s \in \mathcal{S}\}$
$\alpha := |\mathcal{S}(t)|$
$\beta := |\mathcal{Y}|$
$V = (v_{y,s})$

$$v_{y,s} := \frac{c_{y,s} - n_s\theta_{y,s}}{\sqrt{n_s\theta_{y,s}}}, \quad y \in \mathcal{Y},\ s \in \mathcal{S}(t)$$

$\theta_y := \theta_{y,s}$ ($s \in \mathcal{S}(t)$ によらず一定)

証明の概略 (続)

$$R := \left(\frac{\sqrt{n_s n_{s'}}}{n_t}\right)_{s,s' \in \mathcal{S}(t)}$$

固有値: 1 個は 1，他 $\alpha - 1$ 個は 0
R のトレースは 1，大きさ 2 以上の小行列はすべて 0

$$|\lambda I_\alpha - R| = \lambda^\alpha - \mathrm{trace}(R)\lambda^{\alpha-1} + \cdots + (-1)^\alpha |R| = \lambda^{\alpha-1}(\lambda - 1)$$

固有ベクトル

U_0 固有値 1 に対応

$U_1 := (u_{1,s})_{s \in \mathcal{S}(t)}, \cdots, U_{\alpha-1} := (u_{\alpha-1,s})_{s \in \mathcal{S}(t)}$ 固有値 0 に対応

$\widetilde{U} := (U_0, U_1, \cdots, U_{\alpha-1})$ 正規直交 $(\alpha \times \alpha)$
$U := (U_1, \cdots, U_{\alpha-1})$: $(\alpha \times (\alpha - 1))$

証明の概略 (続)

$$T := (\sqrt{\theta_y \theta_{y'}})_{y,y' \in \mathcal{Y}}$$

固有値: 1 個は 1, 他 $\beta - 1$ 個は 0
固有ベクトル

$W_0 := (\sqrt{\theta_y})_{y \in \mathcal{Y}}$ 固有値 1 に対応

$W_1 := (w_{y,1})_{y \in \mathcal{Y}}, \cdots, W_{\beta-1} := (w_{y,\beta-1})_{y \in \mathcal{Y}}$ 固有値 0 に対応

$\widetilde{W} := (W_0, W_1, \cdots, W_{\alpha-1})$ 正規直交 $(\alpha \times \alpha)$
$W := (W_1, \cdots, W_{\beta-1})$: $(\beta \times (\beta - 1))$

$Q := {}^tUVW$, $(\alpha - 1) \times (\beta - 1)$ 行列

$$q_{i,j} := \sum_{s \in \mathcal{S}(t)} \sum_{y \in \mathcal{Y}} u_{i,s} v_{y,s} w_{y,j}$$

証明の概略 (続)

$$
\begin{aligned}
K(\mathcal{S}) - K(\mathcal{S}^*) &= \sum_{t \in \mathcal{S}^*} |\mathcal{S}(t)|(|\mathcal{Y}| - 1) - \sum_{t \in \mathcal{S}^*} (|\mathcal{Y}| - 1) \\
&= \sum_{t \in \mathcal{S}^*} (|\mathcal{S}(t)| - 1)(|\mathcal{Y}| - 1)
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{A}_t := \sum_{s \in \mathcal{S}(t)} \sum_{y \in \mathcal{Y}} c_{y,s} \log \frac{c_{y,s}}{n_s} - \sum_{y \in \mathcal{Y}} c_{y,t} \log \frac{c_{y,t}}{n_t}
$$

$$
\mathcal{H}^{(\mathcal{S}^*)}(z^n) - \mathcal{H}^{(\mathcal{S})}(z^n) = \sum_{t \in \mathcal{S}^*} \mathcal{A}_t
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_t &:= \sum_{s \in \mathcal{S}(t)} \sum_{y \in \mathcal{Y}} \frac{(c_{y,s} - n_s\theta_y)^2}{n_s\theta_y} - \sum_{y \in \mathcal{Y}} \frac{(c_{y,t} - n_t\theta_y)^2}{n_t\theta_y} \\
&= \sum_{s \in \mathcal{S}(t)} \sum_{y \in \mathcal{Y}} v_{y,s}^2 - \sum_{y \in \mathcal{Y}} v_{y,t}^2 = \sum_{i=1}^{\alpha-1} \sum_{j=1}^{\beta-1} q_{i,j}^2.
\end{aligned}
$$

証明の概略 (続)

- $2\mathcal{A}_t - \mathcal{B}_t \to 0 \ (n \to \infty)$
- $\mathcal{B}_t \sim \chi_{(\alpha-1)(\beta-1)}$

を証明すればよい (テキスト 119-121 ページ)

$$q_{i,j} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

を示せれば、自由度 $(\alpha - 1)(\beta - 1)$ の χ^2 分布になる (命題 1.5)

定理 3.7

定理 3.7

各 $\mathcal{S} \in Under(\mathcal{S}^*)$ で、$n \to \infty$ で，確率 1 で

$$\frac{IC^{(\mathcal{S})}(z^n) - IC^{(\mathcal{S}^*)}(z^n)}{n} \to D(\mathcal{S}^* || \mathcal{S})$$

証明: 確率 1 で，$s \in Over(\mathcal{S}^*) \cup \{\mathcal{S}^*\}$ で

$$\frac{c_{y,s}}{n_s} \to \theta_{y,s}.$$

各 $\mathcal{S} \in Under(\mathcal{S}^*)$ で

$$\begin{aligned}
\frac{c_{y,s}}{n_s} &= \sum_{t \in \mathcal{S}^*} \frac{c_{y,s\cap t}}{n_s} = \sum_{t \in \mathcal{S}^*} \frac{n_{s\cap t}/n}{n_s/n} \frac{c_{y,s\cap t}}{n_{s\cap t}} \\
&\to \sum_{t \in \mathcal{S}^*} \frac{p(s \cap t)}{p(s)} \theta^*_{y,t} = \theta_{y,s}
\end{aligned}$$

定理 3.7 (続)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\mathcal{H}^{(\mathcal{S})}(z^n) - \mathcal{H}^{(\mathcal{S}^*)}(z^n)}{n} \\
= & \sum_{t\in\mathcal{S}^*}\sum_{y\in\mathcal{Y}} \frac{c_{y,t}}{n_t}\log\frac{c_{y,t}}{n_t} - \sum_{s\in\mathcal{S}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} \frac{c_{y,s}}{n_s}\log\frac{c_{y,s}}{n_s} \\
= & \sum_{t\in\mathcal{S}^*}\sum_{s\in\mathcal{S}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} \frac{c_{y,t\cap s}}{n}\log\frac{c_{y,t}}{n_t\theta_{y,t}} - \sum_{t\in\mathcal{S}^*}\sum_{s\in\mathcal{S}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} \frac{c_{y,t\cap s}}{n}\log\frac{c_{y,s}}{n_s\theta_{y,s}} \\
& + \sum_{t\in\mathcal{S}^*}\sum_{s\in\mathcal{S}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} \frac{n_{t\cap s}}{n}\cdot\frac{c_{y,t\cap s}}{n_{t\cap s}}\log\frac{\theta_{y,t}}{\theta_{y,s}} \\
\to & \sum_{t\in\mathcal{S}^*}\sum_{s\in\mathcal{S}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p[s\cap t]\theta_{y,t}\log\frac{\theta_{y,t}}{\theta_{y,s}} \\
= & D(\mathcal{S}^*||\mathcal{S})
\end{aligned}
$$