

鈴木讓「ベイジアンネットワーク入門」(培風館)

3. 統計的学習

3.1 大数の法則と中心極限定理

鈴木讓

大阪大学

2010年6月3日

あらまし

大数の法則

中心極限定理

Borel-Cantelli の補題

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$$

命題 3.1 (Borel-Cantelli の補題)

- $\sum_{k=1}^n \mu(A_k)$ が収束
 $\implies \mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$ ($\{A_n\}$ 無限回の確率が 0)
- $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ が独立, $\sum_{k=1}^n \mu(A_k)$ が発散
 $\implies \mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$ ($\{A_n\}$ 無限回の確率が 1)

第 1 の Borel-Cantelli の補題の証明

各 $m = 1, 2, \dots$ で

$$\mu\left(\bigcup_{k=m}^n A_k\right) \leq \sum_{k=m}^n \mu(A_k)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$$

$m \rightarrow \infty$ で

$$\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu(A_k) \rightarrow 0.$$

第2の Borel-Cantelli の補題の証明

$$1 - x \leq e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ が独立なので、各 $n = 1, 2, \dots$ と $m \rightarrow \infty$ で

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcap_{k=n}^{n+m} \overline{A_k}\right) &= \prod_{k=n}^{n+m} (1 - \mu(A_k)) \\ &\leq \prod_{k=n}^{n+m} \exp[-\mu(A_k)] = \exp\left[-\sum_{k=n}^{n+m} \mu(A_k)\right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

各 $n = 1, 2, \dots$ で、 $\mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = 0$

$$\mu(\overline{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n}) = \mu\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = 0$$

Markov の不等式

$$\alpha > 0$$

$$k \geq 1$$

補題 3.1 (Markov の不等式)

$$\mu(|X| \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha^k} E[|X|^k]$$

証明:

$$\begin{aligned} E[|X|^k] &= \int_{x \in \mathbb{R}} |x|^k \mu_X(dx) \geq \int_{|x| \geq \alpha} |x|^k \mu_X(dx) \\ &\geq \alpha^k \int_{|x| \geq \alpha} \mu_X(dx) \end{aligned}$$

大数の強法則

$\{X_i\}_{i=1}^n$: 独立で同一の分布に従う確率変数 ($E[X_i] = 0$)

定理 3.1 (大数の強法則)

$E[X_i^2] < \infty, E[X_i^4] < \infty$ のとき ,

$$\mu \left\{ \omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) = 0 \right\} = 1$$

大数の強法則の証明

$\sigma^2 := E[X_n^2]$, $\xi^4 := E[X_n^4]$, $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $K > 0$
 i, j, k, l の 2 つが同じ s , 他の 2 つが同じ $t \neq s$ のとき,

$$E[X_s^2 X_t^2] = E[X_s^2] E[X_t^2] = \sigma^4$$

i, j, k, l がすべて異なるとき,

$$E[X_i X_j^3] = E[X_i X_j X_k^2] = E[X_i X_j X_k X_l] = 0$$

$$E[S_n^4] = \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq n} E[X_i X_j X_k X_l] = n\xi^4 + 3n(n-1)\sigma^4 \leq Kn^2$$

Markov の不等式に $X = S_n$, $k = 4$, $\alpha = n\epsilon$ ($\epsilon > 0$) を適用:

$$\mu(|S_n| \geq n\epsilon) \leq \frac{1}{(n\epsilon)^4} Kn^2 = K\epsilon^{-4} n^{-2}$$

大数の強法則の証明 (続)

$$A_\epsilon := \limsup_{n \rightarrow \infty} \{\omega \in \Omega \mid |n^{-1} S_n(\omega)| > \epsilon\}$$

第 1 の Borel-Cantelli, $\sum_{n=1}^{\infty} K\xi^{-4} n^{-2} < \infty$ より, $\mu(A_\epsilon) = 0$

$$\Omega - \left\{ \omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0 \right\} = \bigcup_{\epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}} A_\epsilon$$

右辺は事象 A_ϵ を可算個加えているので事象 (左辺も事象)

$$\mu\left(\bigcup_{\epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}} A_\epsilon\right) \leq \sum_{\epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}} \mu(A_\epsilon) = 0$$

確率収束と概収束

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow X$$

確率収束 任意の $\epsilon > 0$ について,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\} = 0$$

概収束 $\mu\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1$

確率収束 $\not\Rightarrow$ 概収束

例: $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$: 独立な事象の列

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}, X_n = I_{A_n}, \mu(A_n) = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$$

($X_n \rightarrow 0$ に確率収束)

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \rightarrow \infty$$

($n \rightarrow \infty$) と第 2 の Borel-Cantelli から

$$\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$$

($X_n \rightarrow 0$ に概収束しない)

確率収束 \Leftarrow 概収束

命題 3.2

確率収束 \Leftarrow 概収束証明: $k = 1, 2, \dots$

$$A_{k,n} := \left\{ \omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{k} \right\}$$

$$A_k := \limsup_{n \rightarrow \infty} A_{k,n}$$

$$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \left\{ \omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \neq X(\omega) \right\}$$

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow X (\text{概収束}) \iff 0 = \mu(A) \geq \mu(A_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_{k,n}) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_{k,n}) \leq \mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_{k,n}) = \mu(A_k) = 0$$

任意の $\epsilon > 0$ で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon) = 0$$

大数の弱法則

$\{X_i\}_{i=1}^n$: 独立で同一の分布に従う確率変数 ($E[X_i] = 0$)

大数の弱法則

任意の $\epsilon > 0$ について,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left\{ \omega \in \Omega \mid \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) \right| > \epsilon \right\} = 0. \quad (1)$$

Chebyshev の不等式

補題 3.2(Chebyshev の不等式)

平均 0 , 分散が有限の確率変数 X と $\epsilon > 0$ について ,

$$\mu(|X - E[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} V[X]$$

証明: Markov の不等式で , X を $X - E[X]$ とし , $k := 2$

大数の弱法則の別証明: Chebyshev の不等式で , $X := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

$$\frac{\sum_{i=1}^n V[X_i]}{n^2 \epsilon^2} = \frac{V[X_n]}{n \epsilon^2} \rightarrow 0$$

中心極限定理

X : 確率変数

$\{X_n\}$: 確率変数の列

$\{X_n\}$ が X に法則収束

X の分布関数 F_X の不連続点以外で, $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x) (n \rightarrow \infty)$

$\{X_n\}$: 独立で同一分布 ($E[X_n] = \mu, V[X_n] = \sigma^2$)

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i$$

中心極限定理

$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ は標準正規分布に法則収束