

鈴木讓「ベイジアンネットワーク入門」(培風館)

2. グラフィカルモデル

## 2.5 Bayesian ネットワーク: 依存モデルの有向非巡回グラフによる表現

鈴木讓

大阪大学

20010年5月27日

# あらまし

- 1 Bayesian ネットワーク
- 2 依存モデル  $M$  が DAG 同型

## Bayesian ネットワーク

$D = (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}})$ : DAG

$M$ : 依存モデル

頂点集合  $\mathbf{U}$  = 確率変数の集合  $\mathbf{U}$

$D = (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}})$  が  $M$  の I-対応

重複のない  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{U}$

$$\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \rangle_D \implies I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y})_M$$

$D = (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}})$  が  $M$  の D-対応

重複のない  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{U}$

$$\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \rangle_D \longleftarrow I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y})_M$$

## Bayesian ネットワーク (続)

$D = (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}})$  が  $M$  の完全対応

$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{U}$

$$\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \rangle_D \iff I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y})_M$$

$M$  は DAG 同型 (DAG と同型、因果的)

$D$  が  $M$  の極小 I-対応 ( $D$  が  $M$  の Bayesian ネットワーク)

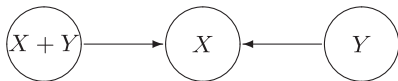
- ①  $D = (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}})$  が  $M$  の I-対応
- ② 任意の  $\vec{\mathbf{E}}' \subsetneq \vec{\mathbf{E}}$  に対して,  $D' = (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}}')$  が  $M$  の I-対応ではない

## Bayesian ネットワーク (続)

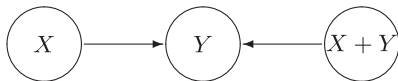
例: 3通りの Bayesian ネットワーク。I 対応だが、D 対応ではない

- 1  $I(\{X + Y\}, \{X\}, \{Y\})_M, I(\{X\}, \{Y\}, \{X + Y\})_M,$   
 $I(\{Y\}, \{X + Y\}, \{X\})_M$ : 不成立
- 2  $\langle\{X + Y\}|\{X\}|\{Y\}\rangle_D, \langle\{X\}|\{Y\}|\{X + Y\}\rangle_D,$   
 $\langle\{Y\}|\{X + Y\}|\{X\}\rangle_D$ : 不成立
- 1  $I(\{X + Y\}, \{\}, \{Y\})_M, I(\{X\}, \{\}, \{X + Y\})_M,$   
 $I(\{Y\}, \{\}, \{X\})_M$ : 成立
- 2  $\langle\{X + Y\}|\{\}|\{Y\}\rangle_D, \langle\{X\}|\{\}|\{X + Y\}\rangle_D,$   
 $\langle\{Y\}|\{\}|\{X\}\rangle_D$ : 1 個だけ成立 (2 個以上成立しない)

(a)



(b)



(c)



## 境界有向非巡回グラフ

$d: \mathbf{U} := \{U_1, \dots, U_n\}$  の要素 (確率変数) 間の順序 (任意に固定)

$\mathbf{U}_i := \{U_1, \dots, U_i\}$

$D = (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}})$

$D$  が順序  $d$  のもとでの  $M$  の境界有向非巡回グラフ

$$I(\{U_i\}, \mathbf{Z}, \mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{Z})_M, \quad U_i \notin \mathbf{Z}$$

任意の  $\mathbf{Z}' \subsetneq \mathbf{Z}$  について

$$I(\{U_i\}, \mathbf{Z}', \mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{Z}' - \{U_i\})_M, \quad U_i \notin \mathbf{Z}'$$

が成立しないようにさだめた  $\vec{\mathbf{E}} = \bigcup_{i=1}^n \{(U, U_i) \mid U \in \mathbf{B}_i\}$

## 定理 2.10

$M$ : (5)–(8) を満足する依存モデル

### 定理 2.10

$D$  が  $M$  の境界有向非巡回グラフであれば、Bayesian ネットワーク

## 系 2.4

$\mu_{\mathbf{U}}$ :  $\mathbf{U}$  に関する確率

$d$ :  $\mathbf{U}$  の順序 (固定)

### 系 2.4

- ①  $\mathbf{U}$  の要素の順序  $d$  が与えられたもとで,

$$D = (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}}), \quad \vec{\mathbf{E}} = \{(U, U_i) \mid U \in \pi(U_i), i = 1, \dots, n\}$$

$$\mu_{U_i | \pi(U_i)} = \mu_{U_i | U_1, \dots, U_{i-1}}, \quad \pi(U_i) \subseteq \{U_1, \dots, U_{i-1}\}$$

$$\mu_{U_i | \mathbf{Z}} \neq \mu_{U_i | U_1, \dots, U_{i-1}}, \quad \mathbf{Z} \subseteq \pi(U_i), \quad \mathbf{Z} \neq \pi(U_i)$$

とかければ、 $D$  は  $\mu$  の Bayesian ネットワーク

- ②  $\mu(\mathbf{U} = \mathbf{u}) > 0$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}(\Omega)$  のとき,  $\{\pi(U_i)\}_{i=1}^n$  は一意 (Bayesian ネットワークは  $d$  のもとで一意)



## 系 2.5

### 系 2.5

系 2.4 で Bayesian ネットワークが得られた際の順序  $d$  は、 $\vec{E}$  の方向を変えない範囲で別の順序に変えることができる。

## 系 2.6

$D = (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}})$ :  $M$  の Bayesian ネットワーク

系

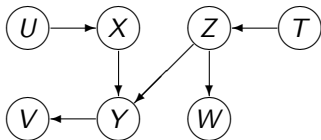
$$B(X) := \pi(X) \cup \{Y \in \mathbf{U} \mid (X, Y) \in \vec{\mathbf{E}}\} \cup \{Z \in \pi(Y) \mid (X, Y) \in \vec{\mathbf{E}}\}$$

の頂点だけで、 $X \in \mathbf{U}$  の Markov 境界  $B_M(X)$  を構成する。

証明:  $D$  は Bayesian ネットワークであり、 $I$  対応。

$$\langle \{X\} \mid B(X) \mid \mathbf{U} - \{X\} - B(X) \rangle_D \implies I(\{X\}, B(X), \mathbf{U} - \{X\} - B(X))_M$$

より、 $\langle \{X\} \mid B(X) \mid \mathbf{U} - B(X) - \{X\} \rangle_G$  をいえば十分



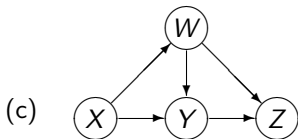
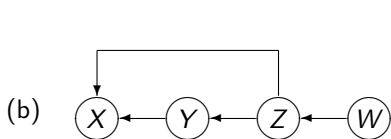
## 順序を変えると、構造が変わる

$$\Sigma = \{I(\{X\}, \{Y\}, \{Z\}), I(\{X\}, \{Z\}, \{W\}), I(\{Y\}, \{Z\}, \{W\})$$

$$I(\{X, Y\}, \{Z\}, \{W\}), I(\{X\}, \{Y, Z\}, \{W\}), I(\{Y\}, \{X, Z\}, \{W\})\}$$

$M$ :  $\Sigma$  の要素に (5), (12) を適用した  $\mathbf{U} = \{X, Y, Z, W\}$  の依存モデル

$$I(\{X\}, \{Y\}, \{Z\})_M, I(\{X\}, \{Y, Z\}, \{W\})_M, \neg I(\{X\}, \{Y\}, \{Z, W\})$$



## 定理 2.11

### 定理 2.11

依存モデル  $M$  が DAG 同型であるためには, (5)-(9) 以外に, 以下が必要

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{W}) \Leftarrow I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}) \wedge I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}), \quad (46)$$

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}) \wedge I(\mathbf{X}, \mathbf{Z} \cup \{W\}, \mathbf{Y}) \Longrightarrow I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \{W\}) \vee I(\{W\}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}), \quad (47)$$

$$\begin{aligned} & I(\{X\}, \{Z, W\}, \{Y\}) \wedge I(\{Z\}, \{X, Y\}, \{W\}) \\ & \Longrightarrow I(\{X\}, \{Z\}, \{Y\}) \vee I(\{X\}, \{W\}, \{Y\}). \end{aligned} \quad (48)$$

証明: DAG の公理で成立しているものは, 依存モデルの公理でも成立。  
命題 2.9 の  $\langle \cdot | \cdot | \cdot \rangle_D$  で成立するものは,  $I(\cdot, \cdot, \cdot)$  でも成立。

## 定理 2.11 は、必要条件にすぎない

例:  $\mathbf{U} = \{X, Y, Z, W\}$  で,

$I(\{X\}, \{Y, Z\}, \{W\})_M, I(\{Y\}, \{X\}, \{Z\})_M$  が真

$I(\{X\}, \{Y\}, \{W\})_M, I(\{X\}, \{Z\}, \{W\})_M, I(\{Y\}, \{X, W\}, \{Z\})_M$  が偽

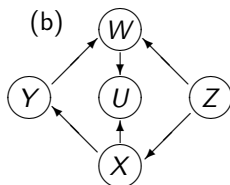
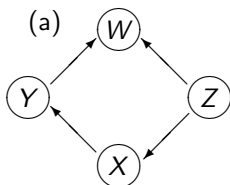
定理 2.11 の条件を満足する依存モデル  $M$  が存在 ((a) は完全対応)

$\mathbf{U} = \{X, Y, Z, W\}$  の依存モデルの真偽は変えずに、

$I(\{Y, Z\}, \{W\}, \{U\})_M$  が真で  $I(\{X\}, \{Y, Z, U\}, \{W\})_M$  が偽

となる確率変数  $U$  を  $\mathbf{U}$  に加えても、定理 2.11 の条件は維持できる。

$\langle \{Y, Z\} | \{W\} | \{U\} \rangle_D$  が成立しない ((b) など)。



## 定理 2.12

### 定理 2.12

依存モデル  $M$  が無向グラフ  $G$  とグラフ同型るとき、  
有向非巡回グラフとグラフ同型  $\iff G$  が chordal

証明:  $G$  は無向グラフ同型より、  
 $G$  が chordal でない

$\implies G$  は (21) を満足せず (命題 2.4)

$\implies M$  は (48) を満足せず (定理 2.11)

$\implies D$  は DAG 同型ではない

$G$  が chordal

$\implies G$  は再帰的単純 (定理 2.2)

$\implies$  単純な頂点へ隣接の頂点から有向辺をひくと DAG  $D$   
( $X \rightarrow Z \leftarrow Y$  の  $X, Y$  が隣接)

$\implies G$  でいえる  $M$  の真偽と、 $D$  でいえる  $M$  の真偽が一致

$\implies D$  は DAG 同型

## 系 2.7

依存モデル  $M$  が無向グラフおよび有向非巡回グラフの両方とグラフ同型  
 $\iff M$  が (5), (6), (9), (30), (31), (48) を満足。

証明:

定理 2.6 より、 $M$  が無向グラフ同型  $\implies$  (5), (6), (9), (30), (31)

定理 2.11 より、 $M$  がさらに DAG 同型  $\implies$  (48)

定理 2.6 より、(5), (6), (9), (30), (31)  $\implies M$  が無向グラフ同型

命題 2.4 より、さらに (48)  $\implies$  (21)  $\implies G$  は chordal

定理 2.12 より、 $M$  が無向グラフ同型で chordal  $\implies M$  は DAG 同型

# DAG 同型の必要十分条件を依存モデルの公理であらわす

**必要** 定理 2.11: (5)-(9), (46), (47), (48)

**十分** 定理 2.6: (5), (6), (9), (30), (31), 定理 2.12: (48)

必要十分は未解決



# モラル化

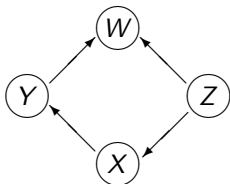
モラル化: 有向辺の向きを取っただけでは、1対応の無向グラフが得られない

$$X \rightarrow Z \leftarrow Y \implies \mathbf{E} := \mathbf{E} \cup \{\{X, Z\}, \{Y, Z\}, \{X, Y\}\}$$

$$\neg X \rightarrow Z \leftarrow Y \implies \mathbf{E} := \mathbf{E} \cup \{\{X, Z\}, \{Y, Z\}\}$$

例:

モラル化する前



モラル化した後

