

鈴木讓「ベイジアンネットワーク入門」(培風館)
2. グラフィカルモデル
2.1 条件付独立性

鈴木讓

大阪大学

2010年5月6日

あらまし

- 1 条件付独立性
- 2 依存モデル
- 3 定理 2.1
- 4 グラフィカルモデル

条件付分布関数

X, Y, Z : 確率変数

$F_{Y|X}(y|x)$: $X = x \in X(\Omega)$ での $(Y \in (-\infty, y])$, $y \in \mathbb{R}$ の条件付確率

X のもとでの Y の条件付分布関数

$$F_{Y|X} : (y, x) \in Y(\Omega) \times X(\Omega) \mapsto F_{Y|X}(y|x) \in [0, 1]$$

各 $x \in X(\Omega)$ で、
$$\begin{cases} \mu_X(dx) > 0, & \mu_X(x - \epsilon/2, x + \epsilon/2) > 0 \text{ for } \forall \epsilon > 0 \\ \mu_X(dx) := 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X^*(\Omega) := \{x \in X(\Omega) \mid \mu_X(dx) > 0\}$$

$F_{Y|X}(y|x), y \in \mathbb{R}$

$x \notin X^*(\Omega)$ では任意

条件付独立性

X, Y は Z のもとで条件付独立

$$F_{XY|Z}(x, y|z) = F_{X|Z}(x|z)F_{Y|Z}(y|z), x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega), z \in Z^*(\Omega) \quad (1)$$

$$\int_0^y \{F_{X|YZ}(x|s, z) - F_{X|Z}(x|z)\} \mu_{Y|Z}(ds|z) = 0, \\ x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega), z \in Z^*(\Omega)$$

$$F_{X|YZ}(x|y, z) = F_{X|Z}(x|z), x \in X(\Omega), y \in Y^*(\Omega), z \in Z^*(\Omega) \quad (2)$$

$\mathbf{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$, $U_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$: 確率変数の集合

X, Y は Z のもとで条件付独立 $I(X, Z, Y)$

X, Y, Z を $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{U}$ に置き換えても、
条件付分布関数および条件付独立性は定義される

\mathbf{X}, \mathbf{Y} は独立

$\mathbf{Z} = \{\}$

条件付独立性 (続)

(例) $\mathbf{X}(\Omega)$, $\mathbf{Y}(\Omega)$ が可算集合のとき, \mathbf{X} , \mathbf{Y} が \mathbf{Z} のもとで条件付独立

\iff

$$\frac{P_{\mathbf{X}\mathbf{Y}\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})}{P_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})} = \frac{P_{\mathbf{X}\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{P_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})} \cdot \frac{P_{\mathbf{Y}\mathbf{Z}}(\mathbf{y}, \mathbf{z})}{P_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega), \mathbf{y} \in \mathbf{Y}(\Omega), \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega) \quad (3)$$

\iff

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} \frac{P_{\mathbf{X}\mathbf{Y}\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})}{P_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})} = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \frac{P_{\mathbf{X}\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{P_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})} \cdot \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} \frac{P_{\mathbf{Y}\mathbf{Z}}(\mathbf{y}, \mathbf{z})}{P_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})},$$
$$\mathcal{X} \subseteq \mathbf{X}(\Omega), \mathcal{Y} \subseteq \mathbf{Y}(\Omega), \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega) \quad (4)$$

条件付独立性 (続)

(例) $F_{X|Z}$, $F_{Y|Z}$, $F_{XY|Z}$ が絶対連続であれば,

$$F_{X|Z} = \int f_{X|Z}(x|z) dx, F_{Y|Z} = \int f_{Y|Z}(y|z) dy,$$

$$F_{XY|Z} = \iint f_{XY|Z}(x, y|z) dx dy$$

なる $f_{X|Z}$, $f_{Y|Z}$, $f_{XY|Z}$ (条件付確率密度関数) が存在

$$\begin{aligned} 0 &= F_{X|Z}(x|z)F_{Y|Z}(y|z) - F_{XY|Z}(x, y|z) \\ &= \int_0^x \int_0^y \{f_{X|Z}(s|z)f_{Y|Z}(t|z) - f_{XY|Z}(s, t|z)\} ds dt \end{aligned}$$

$f_{X|Z}$, $f_{Y|Z}$, $f_{XY|Z}$ が連続であれば、

$$f_{XY|Z}(x, y|z) = f_{X|Z}(x|z)f_{Y|Z}(y|z)$$

依存モデル

$I(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ が真となる $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ の集合

- 特定の依存モデル M を仮定: $I(\cdot, \cdot, \cdot)$ を $I(\cdot, \cdot, \cdot)_M$
必ずしも確率を仮定しなくてもよい
(条件付独立性で真偽を決めるのは特殊ケース)
- 条件付独立性で真偽を決め、確率測度 μ を明示する場合: $I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y})_\mu$

定理 2.1

定理 2.1

$I(\cdot, \cdot, \cdot) = I(\cdot, \cdot, \cdot)_\mu$ となる確率 $\mu_{\mathbf{U}}$ が存在するためには,

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}) \iff I(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{X}), \quad (5)$$

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{W}) \implies I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}) \wedge I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}), \quad (6)$$

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{W}) \implies I(\mathbf{X}, \mathbf{Z} \cup \mathbf{W}, \mathbf{Y}), \quad (7)$$

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}) \wedge I(\mathbf{X}, \mathbf{Z} \cup \mathbf{Y}, \mathbf{W}) \implies I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{W}). \quad (8)$$

さらに, $\mu_{\mathbf{U}}(d\mathbf{u}) > 0$, $\mathbf{u} \in \mathbf{U}(\Omega)$ であるためには

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Z} \cup \mathbf{W}, \mathbf{Y}) \wedge I(\mathbf{X}, \mathbf{Z} \cup \mathbf{Y}, \mathbf{W}) \implies I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{W}) \quad (9)$$

が必要

定理 2.1 (5) の証明

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y})$$

$$\iff F_{\mathbf{X}\mathbf{Y}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}|\mathbf{z}) - F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z})F_{\mathbf{Y}|\mathbf{Z}}(\mathbf{y}|\mathbf{z}) = 0,$$
$$\mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega), \mathbf{y} \in \mathbf{Y}(\Omega), \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega)$$

$$\iff I(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{X})$$

定理 2.1 (6) の証明

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{W})$$

$$\implies F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}),$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega), \mathbf{y} \in \mathbf{Y}^*(\Omega), \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega), \mathbf{w} \in \mathbf{W}^*(\Omega)$$

$$\implies \begin{cases} F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}), \\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega), \mathbf{y} \in \mathbf{Y}^*(\Omega), \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega) \\ F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}), \\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega), \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega), \mathbf{w} \in \mathbf{W}^*(\Omega) \end{cases}$$

$$\implies I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}) \wedge I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{W})$$

定理 2.1 (7) の証明

$$\begin{aligned}
 & I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{W}) \\
 \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}), \\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega), \mathbf{y} \in \mathbf{Y}^*(\Omega), \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega), \mathbf{w} \in \mathbf{W}^*(\Omega) \end{array} \right. \\
 & \left\{ \begin{array}{l} F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}), \\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega), \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega), \mathbf{w} \in \mathbf{W}^*(\Omega) \end{array} \right. \\
 \Rightarrow & F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \mathbf{w}), \\
 & \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega), \mathbf{y} \in \mathbf{Y}^*(\Omega), \mathbf{w} \in \mathbf{Z}^*(\Omega), \mathbf{z} \in \mathbf{W}^*(\Omega) \\
 \Rightarrow & I(\mathbf{X}, \mathbf{Z} \cup \mathbf{W}, \mathbf{Y})
 \end{aligned}$$

定理 2.1 (8) の証明

$$\begin{aligned}
 & I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}) \wedge I(\mathbf{X}, \mathbf{Z} \cup \mathbf{Y}, \mathbf{W}) \\
 \implies & \left\{ \begin{array}{l} F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}), \\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega), \mathbf{y} \in \mathbf{Y}^*(\Omega), \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega) \\ F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega), \mathbf{y} \in \mathbf{Y}^*(\Omega), \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega), \mathbf{w} \in \mathbf{W}^*(\Omega) \end{array} \right. \\
 \implies & F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}), \\
 & \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega), \mathbf{y} \in \mathbf{Y}^*(\Omega), \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega), \mathbf{w} \in \mathbf{W}^*(\Omega) \\
 \implies & I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{W})
 \end{aligned}$$

定理 2.1 (9) の証明

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Z} \cup \mathbf{W}, \mathbf{Y}) \wedge I(\mathbf{X}, \mathbf{Z} \cup \mathbf{Y}, \mathbf{W})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \mathbf{w}), \\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega), \mathbf{y} \in \mathbf{Y}^*(\Omega), \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega), \mathbf{w} \in \mathbf{W}^*(\Omega) \\ F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega), \mathbf{y} \in \mathbf{Y}^*(\Omega), \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega), \mathbf{w} \in \mathbf{W}^*(\Omega) \end{cases}$$

$\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathbf{Y}^*(\Omega), \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbf{W}^*(\Omega)$ について,

$$F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{w}')$$

$$F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w})$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega), \mathbf{y} \in \mathbf{Y}^*(\Omega), \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega), \mathbf{w} \in \mathbf{W}^*(\Omega),$$

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{W})$$

定理 2.1 の逆 (完全性予想)

- ① (5)–(8) $\implies I(\cdot, \cdot, \cdot) = I(\cdot, \cdot, \cdot)_\mu$ なる確率 $\mu_{\mathbf{U}}$ が存在
- ② (9) $\implies \mu_{\mathbf{U}}(d\mathbf{u}) \neq 0$ となるものが存在

条件付独立性の例

(例) (1) より、

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \quad (10)$$

(6), (10), (5), (6), (10), (5) を順次適用して、

$$\begin{aligned} I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}) &\implies I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \wedge I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} - \mathbf{Z}) \\ &\iff I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} - \mathbf{Z}) \\ &\iff I(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{X}) \\ &\implies I(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{X} - \mathbf{Z}) \wedge I(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \\ &\iff I(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{X} - \mathbf{Z}) \\ &\iff I(\mathbf{X} - \mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} - \mathbf{Z}). \end{aligned}$$

(10), (8), (5), (10), (8), (5) を順次適用して、

$$\begin{aligned} I(\mathbf{X} - \mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} - \mathbf{Z}) &\iff I(\mathbf{X} - \mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \wedge I(\mathbf{X} - \mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} - \mathbf{Z}) \\ &\implies I(\mathbf{X} - \mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}) \\ &\iff I(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{X} - \mathbf{Z}) \\ &\iff I(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \wedge I(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{X} - \mathbf{Z}) \\ &\implies I(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{X}) \\ &\iff I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}). \end{aligned}$$

条件付独立性の例

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}) \iff I(\mathbf{X} - \mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} - \mathbf{Z}), \quad (11)$$

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \{\}) \quad (12)$$

(例)

X, Y : 確率 $1/2$ で $0, 1$ が生じる独立な確率変数

$$\mathbf{U} = \{X, Y, X + Y, -Y\}$$

$\mathbf{X} = \{X\}$, $\mathbf{Y} = \{Y\}$, $\mathbf{Z} = \{X + Y\}$, $\mathbf{W} = \{-Y\}$ を (9) に適用

$$\begin{aligned} & \mu(X = x | X + Y = x + y, Y = y, -Y = -y) \\ &= \mu(X = x | X + Y = x + y, Y = y) \\ &= \mu(X = x | X + Y = x + y, -Y = -y), \quad x, y \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$I(\mathbf{X}, \mathbf{Z} \cup \mathbf{W}, \mathbf{Y}) \wedge I(\mathbf{X}, \mathbf{Z} \cup \mathbf{Y}, \mathbf{W})$ は真

$$\mu(X = x | X + Y = x + y, Y = y, -Y = -y) \neq \mu(X = x | X + Y = x + y)$$

$I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{W})$ は偽

$\mu_{\mathbf{U}}(d\mathbf{u}) = 0$ なる $\mathbf{u} \in \mathbf{U}(\Omega)$ が存在し、(9) が成立しない例

グラフィカルモデル

依存モデルの候補の数

定理 2.1 の制約条件を仮定しても、 U に含まれる要素の数とともに非常に大きくなる。

グラフィカルモデル

依存モデルを

無向グラフ : Markov ネットワーク

有向非巡回グラフ : Bayesian ネットワーク

で近似的に表現