鈴木讓「ベイジアンネットワーク入門」(培風館)
1. 確率論の基礎
1.2 確率

鈴木讓

大阪大学

2010 年 4 月 22 日

あらまし

1. 確率
2. 条件付確率
3. 確率変数

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

Ω: 全体集合 (**標本空間**)
$\mathcal{F}$: Ω の σ 集合体 ($\mathcal{F}$ の要素を**事象**という)
$\mu : \mathcal{F} \to [0, 1]$: $\mu(\Omega) = 1$ なる測度 (**確率**)

確率論の公理

1. $\mu(\Omega) = 1$

$A \in \mathcal{F}$ に対して

2. $\mu(A) \geq 0$

互いに排他的な事象の列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、

3. $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

(**確率論の公理**)。μ は、測度であるから、$A, B \in \mathcal{F}$ に対して、

4. $\mu(\{\}) = 0$
5. $A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

1.,3. から、$A \in \mathcal{F}$ に対して、

6. $\mu(\bar{A}) = 1 - \mu(A)$
7. $\mu(A) \leq 1$

確率測度の連続性

命題 1.2

$A \in \mathcal{F}$ および $A_1, A_2 \cdots, \in \mathcal{F}$ に対して、

1. $\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) \le \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \le \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \le \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n)$
2. $A_n \to A \Longrightarrow \mu(A_n) \to \mu(A)$

証明:

1. $B_n := \cap_{k=n}^{\infty} A_k \uparrow \liminf_{n\to\infty} A_n$, $C_n := \cup_{k=n}^{\infty} A_k \downarrow \limsup_{n\to\infty} A_n$
   命題 1.1 $(A_n \uparrow A \Longrightarrow \mu(A_n) \uparrow \mu(A), A_n \downarrow A \Longrightarrow \mu(A_n) \downarrow \mu(A))$ より、
   $$\mu(A_n) \ge \mu(B_n) \to \mu(\liminf_{n\to\infty} A_n)$$
   $$\mu(A_n) \le \mu(C_n) \to \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n)$$
2. 1 で、$A := \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ とおく。

条件付確率

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$: 確率空間
$\mathcal{G}, \mathcal{H}$ $(\subseteq \mathcal{F})$: σ-集合体

$A \in \mathcal{F}$ の $\mathcal{G}$ のもとでの条件付確率

Radon-Nikodym の定理から、各 $G \in \mathcal{G}$ について

$$\mu(A \cap G) = \int_G f_A(\omega)\mu(d\omega)$$

なる $\mathcal{G}$ 上可測な $f_A : \Omega \to [0, \infty)$ が存在

$\int_G (f_A(\omega) - h_A(\omega))\mu(d\omega) = 0$, $G \in \mathcal{G}$ なる h_A も条件付確率

$\mathcal{G}, \mathcal{H}$ は独立

各 $A \in \mathcal{H}$ について，f_A が $\omega \in \Omega$ によらず一定値 $\mu(A)$ をとる

条件付確率 (続)

(例) $\mathcal{G} =< B_1, B_2, \cdots >$, $\mu(B_i) > 0$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$

各 $G \in \mathcal{G}$ で $\mu(A \cap G) = \sum_{B_i \subseteq G} \mu(A \cap B_i) = \sum_{B_i \subseteq G} \frac{\mu(A \cap B_i)}{\mu(B_i)} \mu(B_i)$

$$\omega \in B_i \Longrightarrow f_A(\omega) = \frac{\mu(A \cap B_i)}{\mu(B_i)}$$

特に、$\mathcal{G} = \{\Omega, \{\}, B, \overline{B}\}$, $0 < \mu(B) < 1$ のとき、条件付確率は

$$\mu(A|B) := \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$$

$\mu(A) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$ のとき A, B は独立

確率変数

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間

確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$

$\mathcal{F}$ 上可測

$$\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in D\} \in \mathcal{F}, \;\; D \in \mathcal{B}$$

$$\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \;\; x \in \mathbb{R}$$

$$\{\omega \in \Omega | X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}, \;\; x \in \mathbb{R}$$

確率変数 (続)

(例) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = \{\Omega, \{\}\}$

$X(\omega_1) = x_1 < x_2 = X(\omega_2)$ なる $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ が存在すれば、

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x_1\} = \{\omega_1\},\ \{\omega \in \Omega \mid x_1 < X(\omega) \le x_2\} = \{\omega_2\}$$

$\mathcal{F} \supseteq \{\Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\}\}$ となり、矛盾。したがって、$X(\omega_1) = X(\omega_2)$

離散確率変数

X は離散確率変数

$X(\Omega)$ が可算集合

- $\mathcal{F} =< \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} | x \in X(\Omega)\} >$
- $|X(\Omega)| = m \Longrightarrow |\mathcal{F}| = 2^m$

$P_X(x)$: $(X = x)$, $x \in X(\Omega)$ の確率
$P_{XY}(x, y)$: $(X = x,\ Y = y)$, $x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)$ の確率
$P_Z(z) > 0$ のとき
$P_{X|Z}(x|z) := \dfrac{P_{XZ}(x, z)}{P_Z(z)}$: $Z(\omega) = z$ のもとでの $(X(\omega) = x)$ の条件付確率
$P_{XY|Z}(x, y|z) := \dfrac{P_{XYZ}(x, y, z)}{P_Z(z)}$: $Z(\omega) = z$ のもとでの
$(X(\omega) = x, Y(\omega) = y)$ の条件付確率

確率変数の性質

命題 1.3

X, Y が確率変数であるとき

1. $X + Y$ は確率変数。
2. 任意の $k \in \mathbb{R}$ について，kX は確率変数。
3. XY は確率変数。
4. $|X|$ は確率変数。
5. $\max\{X, Y\}$ は確率変数。

証明: テキスト参照 (13 ページ)

確率変数の性質 (続)

$A \subseteq \Omega$

A の指示関数

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

命題 1.4

I_A が確率変数 $\iff$ A が事象

証明: $(I_A \leq x) = \begin{cases} \{\}, & x < 0 \\ \overline{A}, & 0 \leq x < 1 \\ \Omega, & 1 \leq x \end{cases}$

$$A \in \mathcal{F} \iff \overline{A}, \Omega, \{\} \in \mathcal{F} \iff (I_A \leq x) \in \mathcal{F},\ x \in \mathbb{R}$$